

GAZ ELEKTRONOWY W KWANTUJĄCYM POLU MAGNETYCZNYM

Arkadiusz Wojs

Instytut Fizyki, Politechnika Wroclawska

arkadiusz.wojs@pwr.wroc.pl

Artykuł omawia zagadnienia związane z dynamiką oddziałujących elektronów w układach dwuwymiarowych pod działaniem silnego poprzecznego pola magnetycznego. W szczególności przedstawione są funkcja falowa Laughlina, model złożonych fermionów Jaina, funkcja Moore'a-Reada, a także ogólny związek między postacią pseudopotencjału oddziaływania Haldane'a i postacią korelacji.

1. Wstęp

Rozważmy układ elektronów o określonej koncentracji powierzchniowej ρ , związany w kwazi-dwuwymiarowej warstwie o szerokości w , pod działaniem poprzecznego pola magnetycznego B . Układy takie (o dość dowolnych parametrach w , ρ , masie efektywnej m^* , przenikalności dielektrycznej ϵ , itp.) realizować można wspólnie w postaci domieszkowanych heterostruktur półprzewodnikowych. Jednocząstkowe widmo energii w takim układzie zawiera dyskretne, makroskopowo zwyrodniałe poziomy Landaua. Rozdzielająca sąsiednie poziomy przerwa cyklotronowa ω_c jest proporcjonalna do B , podobnie jak zwyrodnienie każdego z poziomów (g). Wygodnym parametrem określającym dwuwymiarową koncentrację ρ jest (bezwymiarowy) stosunek liczby elektronów N i zwyrodnienia poziomu g , czyli tzw. współczynnik zapelnienia $\nu=N/g$. Natomiast charakterystyczną skalą długości jest długość magnetyczna λ proporcjonalna do $B^{-1/2}$ (więc też do średniej odległości między elektronami przy ustalonej wartości ν).

W dostatecznie silnym polu B energia cyklotronowa $\omega_c \propto B$ znacznie przekracza charakterystyczną energię oddziaływania Coulomba pomiędzy elektronami $e^2/\lambda \propto B^{1/2}$, co pozwala na pominięcie wzbudzeń cyklotronowych przy opisie niskoenergetycznej dynamiki układu. Z drugiej strony, dostatecznie mała szerokość układu w pozwala na pominięcie wszelkich wzbudzeń w kierunku poprzecznym. Przyjmijmy dla prostoty że $\nu < 1$ i skoncentrujmy się na dynamice układu wielu elektronów w przestrzeni Hilberta zdefiniowanej przez ograniczenie ruchu jednocząstkowego do najniższego poziomu Landaua w płaszczyźnie i do stanu podstawowego w kierunku poprzecznym. Po wyeliminowaniu nieistotnego, stałego członu jednocząstkowego, Hamiltonian zawiera wtedy wyłącznie oddziaływanie Coulomba między elektronami V , które całkowicie

określa postać stanu podstawowego, charakter wzbudzeń elementarnych, itd. Co więcej, ze względu na oczywisty brak małego parametru, oddziaływania tego nie sposób opisać perturbacyjnie. Otrzymujemy więc zagadnienie N oddziałujących ciał w częściowo (ν -)zapełnionej zwyrodniałej powłoce jednocząstkowej. Choć formalnie jest ono podobne do problemu N elektronów w powłoce atomowej, to jednak nie całkiem równoważne, ze względu na makroskopowy rozmiar układu (duże N i g przy określonym $N/g=\nu$) i inny charakter dozwolonej elektronom jednocząstkowej przestrzeni Hilberta. Tak więc na przykład reguły Hunda prawdziwe dla powłoki atomowej (które streścić można jako dążenie do maksymalizacji zwyrodnienia wielociałowego stanu podstawowego) okazują się w tym przypadku całkiem niepoprawne.

Dynamika układu w ograniczonej przestrzeni Hilberta zadana jest wyłącznie przez część operatora oddziaływania $V(r)=e^2/r$ ograniczoną do tej dozwolonej przestrzeni. Dozwolone stany pary elektronów w najniższym poziomie Landaua ponumerować można jednoznacznie względny momentem pędu R , przyjmującym wartości parzyste dla pary o spinie zero i nieparzyste dla pary o spinie jeden (przypadek spolaryzowany) i rosnącym wraz ze średnią odległością między dwoma elektronami. Tak więc operator oddziaływania (Coulomba) w obrębie najniższego poziomu Landaua zdefiniowany jest całkowicie przez tzw. pseudopotencjał Haldane'a $V(R)\equiv V_R$ [1]. Co więcej, okazuje się że dominujący wpływ na dynamikę niskoenergetyczną ma niewielka liczba parametrów V_R odpowiadających kilku najniższym wartościom R .

2. Nieściśliwa ciecz elektronowa Laughlina

Kluczowym odkryciem w kontekście opisanym wyżej jest fakt że oddziaływanie (Coulomba) między elektronami prowadzi do powstania niezwyrodniałego stanu podstawowego oddzielonego skończoną przerwą energetyczną od wszelkich wzbudzeń przy określonych ułamkowych wartościach współczynnika zapełnienia ν . Spontaniczne pojawianie się przerwy (a więc i braku liniowej odpowiedzi układu, w szczególności na ciśnienie, stąd określenie: stan nieściśliwy) przy wybranych wartościach $\nu=1/3, 1/5, 2/5$, itp. (najczęściej są to proste ułamki o nieparzystym mianowniku) jest zjawiskiem emergentnym, w szerokim zakresie parametrów całkowicie nieczułym na parametry materiałowe (m^* lub ε), geometrię (w) czy konkretne wartości ρ i B (czyli N i g). Jedną z konsekwencji spontanicznego pojawiania się przerwy jest osobliwe [2] zachowanie się tensora przewodnictwa elektrycznego (znikanie składowej podłużnej σ_{xx} i jednoczesne kwantowanie składowej poprzecznej $\sigma_{xy}=\nu e^2/h$) czyli ułamkowy kwantowy efekt Halla.

Czym jest nieściśliwy stan elektronów w $\nu=1/3$? Odpowiedź na to pytanie podał R. B. Laughlin [3] proponując elegancką postać wielociałowej funkcji falowej opisującej nowy skupienia stan materii – izotropową ciecz elektronową nazwaną jego imieniem.

Rozważmy najpierw całkowicie zapełniony najniższy poziom Landaua, czyli spolaryzowany spinowo stan z $\nu=1$. Przyjmując symetryczną postać cechowania potencjału wektorowego $\mathbf{A} = B(-y/2, x/2, 0)$, funkcje falowe stanów jednocząstkowych uzyskujemy w postaci $\phi_\mu(z) \propto z^\mu \exp(-z^2/2\lambda^2)$, gdzie $z=x+iy$ jest zmienna zespoloną określającą położenie w płaszczyźnie x - y , a $\mu=0, 1, 2, \dots$ jest momentem pędu. Funkcja falowa stanu $\nu=1$ (całkowicie antysymetryczna) ma postać wyznacznika Slatera orbitali

$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ (którego część wielomianowa znana jest od dawna jako wyznacznik van der Monde'a), czyli $\Phi_1(z_1, z_2, \dots) = \prod_{ij}(z_i - z_j) \exp\{-\sum_k(z_k/\lambda)^2/2\}$.

Zauważmy następnie że dowolna spinowo spolaryzowana funkcja falowa dla $\nu < 1$, jako kombinacja liniowa wyznaczników Slatera zbudowanych z funkcji $\phi_{i\sigma}$, musi być postaci $\Phi(z_1, z_2, \dots) = P(z_1, z_2, \dots) \exp\{-\sum_k(z_k/\lambda)^2/2\}$, gdzie P jest całkowicie antysymetrycznym wielomianem stopnia $g=N/\nu$ (pomijając tu i w dalszej części człony rzędu N^0). Swoją funkcję dla $\nu=1/3$ Laughlin zaproponował w następującej postaci:

$$\Phi_{1/3}(z_1, z_2, \dots) = \prod_{ij}(z_i - z_j)^3 \exp\{-\sum_k(z_k/\lambda)^2/2\} \equiv \prod_{ij}(z_i - z_j)^2 \Phi_1(z_1, z_2, \dots), \quad (1)$$

czyli równą funkcji Φ_1 całkowicie wypełnionego poziomu Landaua pomnożonej przez tzw. czynnik korelacyjny Jastrowa. Funkcja falowa Laughlina jest w oczywisty sposób antysymetryczna, ma poprawny współczynnik wypełnienia, jest izotropowa, a także szybko znika przy zbliżaniu do siebie dowolnej pary cząstek, gwarantując niską energię wszelkich oddziaływań dostatecznie silnie odpychających na krótkim zasięgu.

Czy funkcja Laughlina faktycznie dobrze opisuje rzeczywiste stany elektronowe? W odpowiedzi na to pytanie pomaga znajomość faktu że $\Phi_{1/3}$ jest (spośród całej wielociałowej przestrzeni Hilberta $\nu=1/3$) jedynym stanem własnym o zerowej energii dla szczególnego oddziaływania o krótkim zasięgu zdefiniowanego pseudopotencjałem o wyjątkowo prostej postaci $V_R = \delta_{R,1}$. Innymi słowy, $\Phi_{1/3}$ jest jedynym możliwym stanem spolaryzowanym w $\nu=1/3$, w którym $R > 1$ dla każdej pary elektronów. A więc $\Phi_{1/3}$ z pewnością będzie wiernie opisywać rzeczywisty stan podstawowy w $\nu=1/3$, jeśli tylko V_1 jest dominującym współczynnikiem pseudopotencjału. Następny istotny fakt wynika z reguły sumacyjnych tzw. amplitud Haldane'a G_R , zdefiniowanych jako ułamek par o względnym momencie pędu R i pozwalających na wyrażenie całkowitej energii oddziaływania jako $E = N(N-1)/2 \times \sum_R G_R V_R$. Mianowicie, można wykazać że korelacje Laughlina (dane czynnikiem Jastrowa) występują dla dużej klasy pseudopotencjałów zdefiniowanej warunkiem nadliniowości: $V_1 - V_3 > V_3 - V_5 > V_5 - V_7 > \dots$. I wreszcie że warunek nadliniowości spełniony jest przez pseudopotencjał oddziaływania Coulomba w najniższym poziomie Landaua. Warto może dodać że niezależnie od powyższej argumentacji dokładność funkcji Laughlina potwierdzono bezpośrednim porównaniem ze stanami podstawowymi skończonych liczb elektronów wyznaczonymi numerycznie.

Być może najbardziej spektakularną własnością cieczy Laughlina jest ułamkowy ładunek elektryczny jej wzbudzeń elementarnych, tzw. kwazicząstek Laughlina. Tak więc nośnikami prądu elektrycznego przy $\nu \approx 1/3$ są kwazielektrony o ładunku $-e/3$ lub kwazidziury o ładunku $e/3$. Fakt ten wynika z postaci analitycznej funkcji Laughlina, a także został potwierdzony eksperymentalnie w pomiarach szumu śrutowego [4].

3. Model złożonych fermionów

Idea Laughlina w oczywisty sposób stosuje się nie tylko do $\nu=1/3$, ale do wszelkich ułamków postaci $\nu=(2p+1)^{-1}$. Jednak wyjaśnienie natury innych stanów, w których także eksperymentalnie stwierdzono nieściślność (np. $\nu=2/5$) wymagała poważniejszego rozwinięcia teorii. Zauważmy że fakt iż dowolny stan w $\nu < 1$ odpowiada

pewnemu wielomianowi P oznacza że dynamika elektronów w najniższym poziomie Landaua równoważna jest dynamice węzłów tego wielomianu. Jeśli ustalic położenia z_k dla $k \geq 2$, to $P(z_1, z_2, z_3, \dots) \equiv P_{z_2, z_3, \dots}(z_1)$ ma N/v węzłów (wirów), z których N jest sztywno związanych w położeniach z_2, z_3, \dots ze względu na zakaz Pauliego, natomiast pozostałe mają swobodę ruchu. W stanie $\nu=1$ nie ma żadnych węzłów swobodnych, co odpowiada brakowi możliwych wzbudzeń w zapełnionym poziomie Landaua. W stanie Laughlina $\nu=(2p+1)^{-1}$ wszystkie węzły są związane sztywno w położeniach z_2, z_3, \dots , po $2p+1$ na każdym elektronie.

Idąc tym tropem, utożsamiamy korelacje Laughlina z wiązaniem wirów, a wiry z kwantami strumienia pola magnetycznego przechodzącego przez próbkę (proszę zwrócić uwagę że gęstość powierzchniowa zwyrodnienia poziomu Landaua, g/S , jest tożsama powierzchniowej gęstości strumienia w jednostkach kwantu hce^{-1}). I dalej, dowolny stan o niskiej energii (w tym także stan podstawowy) w $\nu < 1$ interpretujemy w następujący sposób [5]: (i) Każdy elektron wiąże w postaci nieskończenie cienkiego solenoidu tę samą parzystą liczbę ($2q$) kwantów pola magnetycznego B ; (ii) Elektrony z dowiązanymi wirami, czyli tzw. złożone fermiony, poruszają się w efektywnym polu magnetycznym B^* , pozostałym po odjęciu od wyjściowego pola B części dowiązanej do elektronów w postaci solenoidów.

Tak więc pomysł polega na zastąpieniu układu N silnie oddziałujących elektronów w silnym polu B (w poziomie Landaua o dużym zwyrodnieniu g) układem tej samej liczny N słabo oddziałujących złożonych fermionów w słabszym polu B^* (w poziomie Landaua o odpowiednio mniejszym zwyrodnieniu $g^* = g - 2qN$). W szczególności, w stanach odpowiadających całkowitym efektywnym współczynnikom zapełnienia $\nu^* \equiv N/g^* = (\nu^{-1} - 2q)^{-1}$ oczekiwać należy nieściśliwości i kwantowego efektu Halla. Każdemu z ciągu stanów Laughlina $\nu = (2p+1)^{-1}$ odpowiada w tym modelu ten sam stan $\nu^*=1$, otrzymany dla różnych $q=p$. Ponadto, model złożonych fermionów przewidyuje nieściśliwość dla wielu innych ułamków postaci $\nu = s/(2qs+1)$ odpowiadających innym całkowitym wartościom $\nu^*=s$. Przewidywania te doskonale zgadzają się zarówno z doświadczeniem (pomiarami hallowskimi) jak i symulacjami numerycznymi (dokładna diagonalizacja hamiltonianu skończonej liczby elektronów w ograniczonej przestrzeni, zazwyczaj na sferze). I tak na przykład stan Jaina $\nu=2/5$ odpowiada $q=1$ oraz $\nu^*=2$.

4. Złożone fermiony w częściowo zapełnionej powłoce

Ponieważ ułamki $\nu=1/3$ i $2/5$ odpowiadają kolejnym całkowitym wartościom $\nu^*=1$ i 2 (przy tej samej wartości $q=1$), odkrycie w 2003 r. przez W. Pana [6] kwantowego efektu Halla w szeregu stanów o pośrednich wartościach $\nu=4/11, 3/8, 5/13$, itp. było sporym zaskoczeniem. Ponieważ stany te odpowiadają ułamkowym zapełnieniom poziomu Landaua złożonych fermionów (odpowiednio, $\nu^*=4/3, 3/2$ i $5/3$), wytłumaczenie ich nieściśliwości musi uwzględniać resztkowe oddziaływanie między samymi złożonymi fermionami, nieistotne przy analizie wcześniej znanych stanów (np. $\nu=1/3$ i $2/5$).

Zarówno energię cyklotronową złożonych fermionów jak i pseudopotencjały ich wzajemnego oddziaływania wewnątrz kolejnych poziomów Landaua są dość dobrze znane z obliczeń numerycznych. Ponieważ rozkład ładunku elektrycznego wyznaczony

dla złożonego fermionu w drugim poziomie Landaua okazuje się wyraźnie różnić od analogicznego rozkładu dla elektronu w pierwszym poziomie Landaua, nie jest wielkim zaskoczeniem że dla małych odległości (czyli dla małych R) pseudopotencjał złożonych fermionów V_R^* różni się znacznie od pseudopotencjału elektronów V_R . W szczególności V_R^* nie jest nadliniowy: $V_1^* \approx 0$, a dominującym parametrem jest V_3^* . Tak więc choć eksperyment dowodzi nieściśliwości cieczy oddziałujących złożonych fermionów, to mechanizm mikroskopowy tej nieściśliwości jest zapewne odmienny niż powstawanie stanu Laughlina czy Jaina „drugiej generacji”.

Rzeczywiście, obliczenia numeryczne [7] polegające na dokładnej diagonalizacji hamiltonianu oddziaływania zdefiniowanego pseudopotencjałem V_R^* dla N fermionów związanych na tzw. sferze Haldane'a z jednej strony potwierdzają występowanie sekwencji niezwyrodniałych stanów podstawowych oddzielonych wyraźną przerwą od pasma wzbudzeń w układach o różnych wartościach N i g^* układających się w ciągi zbieżne do $\nu^*=4/3, 3/2$ oraz $5/3$. Z drugiej strony analiza funkcji korelacji w tych stanach skończonych wyklucza korelacje typu Laughlina, które można by interpretować jako wiązanie przez złożone fermiony kolejnej porcji pola magnetycznego w postaci solenoidów i powstawanie złożonych fermionów „drugiej generacji”. Bardziej prawdopodobne wydaje się że na skutek braku silnego odpychania w $R=1$ złożone fermiony w stanach $\nu=4/11, 3/8$ i $5/13$ grupują się w pary, trójki, lub jeszcze większe klasterki. Niestety, postać korelacji pomiędzy klasterkami nie jest dobrze znana, a więc i mechanizm nieściśliwości pozostaje zagadką.

5. Stany nieściśliwe w wyższych poziomach Landaua

Ułamkowy kwantowy efekt Halla występuje również w częściowo zapełnionych wyższych elektronowych poziomach Landaua. Najbardziej znanym przykładem jest stan $\nu=5/2$, odpowiadający (po uwzględnieniu degeneracji spinowej) połówkowemu zapełnieniu drugiego poziomu. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku stanów $\nu=4/11, 3/8$ i $5/13$, brak nadliniowego zachowania pseudopotencjału V_R (w tym przypadku – pseudopotencjału elektronowego w drugim poziomie Landaua) dla małych wartości R przemawia przeciwko analogii ze stanami nieściśliwymi Laughlina i Jaina z pierwszego poziomu Landaua. Sama parzystość mianownika stanu $\nu=5/2$ wyklucza możliwość jego interpretacji jako całkowicie zapełnionej powłoki jakichś fermionów „zastępczych”.

Najbardziej prawdopodobnym kandydatem na funkcję falową dla stanu $\nu=5/2$ jest tzw. funkcja Moore'a-Reada [8], w której w miejsce wyznacznika Slatera definiującego stan Laughlina pojawia się swoisty pierwiastek wyznacznika czyli tzw. Pfaffian. Jako że funkcja falowa Moore'a-Reada jest dokładnym stanem własnym o zerowej energii dla kontaktowego odpychania trójcząstkowego, opisuje ona stan sparowany elektronów. Własności postulowanych wzbudzeń elementarnych cieczy Moore'a-Reada są jeszcze bardziej egzotyczne niż kwazicząstka Laughlina. Mianowicie, oprócz ułamkowego ładunku elektrycznego i ułamkowej statystyki, postuluje się im nieabelowość statystyki, a w szczególności zwyrodnienie stanu zawierającego więcej niż dwie kwazicząstki ze względu na ich przestawienia. Pytanie czy tak niezwykle stan kwantowy istotnie opisuje rzeczywisty stan elektronowy obserwowany w doświadczeniach hallowskich jest nieco

trudniejsze niż w przypadku stanu Laughlina czy Jaina i nadal pozostaje otwarte. Jednak inne pomiary, mające na celu badanie statystyki wzbudzeń a nie tylko nieściśliwości, zostały już zaproponowane [9] i niedługo możemy się doczekać rozstrzygnięcia.

Przy połówkowym zapełnieniu wyższych poziomów Landaua doświadczenia wykazują silną anizotropowość przewodnictwa elektrycznego, sugerując inne stany skupienia elektronów niż izotropowa ciecz. Wśród nich znajdują się zarówno stany uporządkowane przestrzennie (paski o większej koncentracji przedzielone paskami o odpowiednio mniejszej koncentracji) jak i różnorakie fazy ciekłokrystaliczne [10].

Niejako na przeciwnym biegunie koncentracji nośników znajdują się układy silnie rozrzedzone, o współczynnikach zapełnienia znacznie mniejszych od jedności. W takich układach zgodnie z dawnymi przewidywaniami teoretycznymi elektrony kondensują do postaci trójkątnego kryształu Wignera [11].

6. Podsumowanie

Dwuwymiarowy gaz elektronowy w silnym polu magnetycznym jest układem w którym oddziaływanie odgrywa pierwszorzędną rolę w określeniu natury stanu podstawowego i wzbudzeń elementarnych. Z jednej strony zachowanie oddziałujących elektronów w tych warunkach jest często praktycznie nieczułe na parametry materiałowe, geometrię układu, itp., uzasadniając mocno wyidealizowany obraz rzeczywistości. Z drugiej strony, diagram fazowy nawet tak wyidealizowanego układu jest zaskakująco bogaty. Zależnie od koncentracji powierzchniowej elektrony tworzą szereg stanów skupienia, różniących się między innymi stopniem kondensacji, symetrią, a także ładunkiem elektrycznym i statystyką wzbudzeń. W niniejszym artykule zaprezentowano pobieżny przegląd wybranych stanów; pominięto natomiast m.in. rolę odgrywaną przez spin.

Literatura

- [1] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983)
- [2] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982)
- [3] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983)
- [4] R. De-Piccolto, et al., Nature **389**, 162 (1997)
- [5] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989)
- [6] W. Pan, et al., Phys. Rev. Lett. **90**, 016801 (2003)
- [7] A. Wójs, D. Wodziński, J. J. Quinn, Phys. Rev. B **74**, 035315 (2006)
- [8] G. Moore, N. Read, Nucl. Phys. B **360**, 362 (1991)
- [9] A. Stern, B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **96**, 016802 (2006)
- [10] A. A. Koulakov, M. M. Fogler, B. I. Shklovskii, Phys. Rev. Lett. **76**, 499 (1996)
- [11] Y. E. Lozovik, V. I. Yudson, JETP Lett. **22**, 11 (1975)