

## 분수 양자 홀 상태에 대한 복합 페르미 입자 모형과 준입자 상호작용

이경수\*

부산대학교 물리학과, 부산 609-735

아라카디우스 보이스

Institute of Physics, Wroclaw University of Technology, 50-370 Wroclaw, Poland

제이 제이 쿼

Department of Physics and Astronomy, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee 37996, USA

(2007년 8월 30일 받음)

분수양자 Hall 상태 (fractional quantum Hall states; FQHS)는 고도로 축퇴된 란다우 준위 (Landau level; LL)를 일부만 채우고 있는 전자들 사이의 상호작용에 기인하며 2차원 계의 비압축성 (incompressible) 양자 유체 (quantum fluid) 상태이다. 복합 페르미 입자 (composite fermion; CF)라 불리는 준입자 (quasiparticle; QP) 개념을 쓰면 FQHS의 가장 두드러진 비압축 상태를 단일 입자 측면에서 간단히 기술할 수 있다. 이 논문에서는 준입자들 간 상호작용은 다음 단계 CF QP 상태의 종류를 결정하며, 그 상호작용이 Laughlin형인 경우에만 준입자 채움인수 (QP filling factor)  $\nu_{QP}$ 에서 표준 CF 계통 (standard CF hierarchy)에 속하는 FQHS 상태가 가능함을 밝힌다. 입자쌍의 상호작용을 나타내는 슈도퍼텐셜이 버금조화적인 (subharmonic) 경우에는 스펙트럼의 가장 낮은 에너지 상태에서 Laughlin 상관작용이 일어나지 않으며, 이에 따라 일부만 채워진 QP 껍질에 있는 CF들의 제2세대 CF를 형성하지 않음을 예시한다. 준입자들간 상호작용  $V_{QP}$ 이 초조화적 (superharmonic)이 아니면 상호작용하는 입자들은 입자쌍이나 입자 다발 (cluster)을 형성함으로써 계의 총에너지를 낮추며 비압축성 상태의 계통을 다르게 됨을 수치연산 결과와 함께 제시한다.

PACS numbers: 71.10.Pm, 73.43.-f

Keywords: 2차원 전자계, 양자 Hall 상태, 분수양자 Hall 효과, 복합 Fermi 입자 모형, Laughlin 준입자, 준입자 상호작용, 준입자쌍, 응집 양자 액체 상태, 잔여 상호작용

### I. 서 론

이 해설 논문의 목적은 입자들이 상호작용하는 2차원 다체계 [1,2]가 드러내는 진기한 양자역학적인 현상인 분수 양자 홀 상태 (fractional quantum Hall states; FQHS)에 대한 실험 관측결과를 해석하는 데 널리 사용되고 있는 개념을 좀더 깊이 있게 이해할 수 있도록 하는 데 있다. 특히 임의의 외부 자기장 값에서 낮은 에너지 상태를 결정하는 데 전혀 적합하지 않은 에너지 척도가 도입되는 천-사이먼즈 (Chern-Simons; CS) 평균장 근사 (mean field approximation) 방법이 가장 낮은 에너지 상태를 잘 예측할 수 있는 까닭을 바르게 이해 하고자 한다.

한 쌍의 전자 사이의 상호작용 에너지를 슈도퍼텐셜 (pseudopotential)이라 한다. Haldane 구 표면에 놓인 개별 각운동량이  $l$ 이고 상대 각운동량 (relative angular momentum)이  $\mathcal{R}$ 인 두 전자의 슈도퍼텐셜  $V(L')$ 은 이들 두 전자의 총 각운동량  $L' = 2l - \mathcal{R}$ 의 값에 따라 다르다. 슈도퍼텐셜이  $V_H(L') = A + BL'(L' + 1)$  (단,  $A$ 와  $B$ 는 상수)인 형태를 가지면 조화 슈도퍼텐셜 (harmonic pseudopotential)이라 부르며 이때는 상관작용이 결여되어 있음을 확인할 수 있다. 이러한 조화 퍼텐셜을 가지는  $N$  개 입자로 이루어진 계의 총 각운동량 다중 상태  $|l^N; L\alpha\rangle$ 의 에너지  $E_\alpha(L)$ 는 다중 상태의 총 각운동량  $L$ 에만 의존한다. 그러므로, 총 각운동량  $L$ 의 값이 같은 서로 다른 다중상태들의 일차 결합상태는 에너지가 서로 같다.  $\Delta V(L') = V(L') - V_H(L') > 0$ 인 초조

\*E-mail: ksyi@pusan.ac.kr

화 슈도퍼텐셜 (superharmonic pseudopotential)인 경우에만 “짝 각운동량  $L'$ 이 큰 상태, 다시 말하면 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 이 가장 작아서 입자들간 척력이 큰 상태를 기피하게 되는” Laughlin 상관작용이 가능하다. 들뜬 란다우 준위 (Landau level; LL)에 있는 입자들의 슈도퍼텐셜은 짝 각운동량  $L'$ 이 가장 큰 값, 그러므로  $\mathcal{R}$ 이 가장 작은 값인  $\mathcal{R} = 1$ 일 때는 초조화적이지 않다. 그러므로, 전자 채움인수가  $8/3 \geq \nu \geq 7/3$ 인 상태에서는 Laughlin 상관작용이 일어나지 않는다. 이때는 전자들이 가능한 대로 크기가 가장 작은 쌍을 이루므로써 쌍 진폭 (pair amplitude)이 큰 값을 가지는  $\mathcal{R} = 3$ 인 상태를 기피할 수 있게 된다.

복합 페르미 입자 (composite fermion; CF)는 짝수개의 CS 자기선속 (magnetic flux) 양자 (quantum)를 달고 있는 전자나 홀 (hole)과 같은 페르미 입자들이다. 응축 상태 (condensed states)에 대한 “CF 계통 이론”의 기본 개념은 일부만 채워진 CF 껍질에 있는 QP에 CS 선속을 거듭 부착시키는 것이며, 부분 채움인수 (filling factor)의 분모가 홀수로 표현되는 모든 응축상태를 예측할 수 있다. 그러나, 이 이론은 ‘계통의 모든 단계에 CF 모형을 적용할 수 있다’는 가정에 바탕을 두고 있다. 수치 대각화 (numerical diagonalization) 방법을 사용하면 QP들간 ‘잔여’ 상호작용 (residual interaction)  $V_{QP-QP}$ 를 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 의 함수로 나타내 보일 수 있다. 수치연산 결과를 분석하면 계의 상관작용의 특성을 이해할 수 있다. 수치연산 결과에 따르면  $V_{QP-QP}(\mathcal{R})$ 이 모든  $\mathcal{R}$  값에 대하여 항상 초조화적이지 않으며 때로는 Laughlin 상관상태가 허용되지 않게 된다. 이러한 사실 때문에 Laughlin 상관작용에 의한 QP의 딸 상태 (daughter states)와 전자 채움인수가  $\nu = 4/11$ 나  $4/13$ 와 같은 응축상태가 일어나는 것은 불가능하게 된다. 최근에 관측된  $\nu = 4/11$ 나  $4/13$ 와 같은 응축상태는, 마치 전자들이 들뜬 LL에서 쌍 (pairing)을 이루는 것과 유사한 현상이며, CF QP들도 쌍을 이룰 것을 암시한다. CF QP들 간에 일어나는 쌍 형성은 CF 사이에 척력이 작용함에도 불구하고 CF 들뜸의 결합상태처럼 행동하는 “새로운 QP들”이 참여하는 전혀 색다른 비압축 상태 조합을 나타내게 된다.

이 총설 논문은 양자 홀 상태의 준입자들 사이의 상호작용의 역할을 재조명한 것이다. 본인들이 발표한 참고 문헌 [3-5]의 결과를 바탕으로 Laughlin의 분수 양자 홀 이론이 제시된 이후 여러 연구자들이 잇따라 확장한 CF 모형을 간단히 알아보고, 보편적인 다체계에 대한 통찰력을 바탕으로 분수 양자 홀 문제를 바라보는 새로운 방식이 가능하며 [3], 최근에 실험실에서 관측된 흥미로운 현상을 바르게 해석할 수 있음을 소개하고자 한다.

## II. 수직 자기장을 받는 2차원 전자들

양자 홀 효과 [6]는 자기장이 수직하게 걸린 2차원 면에 갇힌 전자들이 드러내 보이는 진기한 물리현상이다 [2, 7]. 전자들이  $x-y$  평면에 갇혀 있고 정자기장  $\vec{B} = B\hat{z}$ 이 이 평면에 수직한 방향으로 걸린 경우를 생각하자. 이때 유효질량이  $\mu$ 인 전자의 운동은 다음과 같은 하밀토니안으로 기술할 수 있다.

$$H = (2\mu)^{-1} \left[ \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2. \quad (1)$$

위의 표현에 쓰인 벡터퍼텐셜  $\vec{A}(\vec{r})$ 를 대칭 게이지로 나타내면  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}B(-y\hat{x} + x\hat{y})$ 이다. 여기서  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 는 직각좌표계의 좌표축 방향 단위벡터들이다. 슈뢰딩거 방정식  $(H - E)\Psi(\vec{r}) = 0$ 의 고유상태와 고유값은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다 [8,9].

$$\Psi_{nm}(r, \phi) = e^{im\phi} u_{nm}(r), \quad (2)$$

$$E_{nm} = \frac{\hbar\omega_c}{2} (2n + 1 + m + |m|). \quad (3)$$

위의 식에서  $n$ 과  $m$ 은 각각 주양자수와 각운동량 양자수이며  $\omega_c (= eB/\mu c)$ 는 전자의 사이클로트론 각진동수이다. 식 (2)의 지름방향 파동함수  $u(r)$ 는 다음과 같은 미분방정식의 해이다.

$$\frac{d^2u}{d\eta^2} + \eta^{-1} \frac{du}{d\eta} - (m^2\eta^{-1} + \eta^2 - \epsilon)u = 0 \quad (4)$$

위의 식에서  $\eta$ 와  $\epsilon$ 은 각각  $\eta = \sqrt{eB/2\hbar cr} = \frac{r}{\sqrt{2}l_0}$ 와  $\epsilon = (4E/\hbar\omega_c) - 2m$ 이다. 여기서  $l_0 = \sqrt{\hbar c/eB}$ 는 자기장이 작용하는 계의 길이 특성을 나타내는 자기길이 (magnetic length)이다. 지름 파동함수  $u_{nm}(r)$ 을 버금 라게르 다항식 (associated Laguerre polynomials)  $L_n^m$ 을 써서 나타내면 다음과 같다.

$$u_{nm}(\eta) = \eta^{|m|} \exp(-\eta^2/2) L_n^{|m|}(\eta^2) \quad (5)$$

양자수  $n$ 이 0일 때인  $L_0^{|m|}(\eta^2)$ 은  $\eta$ 에 무관하며  $n = 1$ 일 때는  $L_1^{|m|}(\eta^2) \propto (|m| + 1 - \eta^2)$ 이다. 식 (3)에서 확인할 수 있는 것처럼 단일입자 에너지 스펙트럼은 에너지가  $E = \frac{1}{2}\hbar\omega_c, \frac{3}{2}\hbar\omega_c, \dots$ 인 축퇴도가 매우 큰 준위들로 이루어져 있음을 알게 된다. 이들 에너지 준위를 란다우 준위라 부르며,  $n = 0$ 이고  $m = 0, -1, -2, \dots$ 이면 에너지가 가장 낮은 바닥 LL (lowest LL; LLL)이다. 이 경우의 파동함수는 간단히 다음과 같다.

$$\Psi_{0m} = \mathcal{N}_m z^{|m|} \exp^{-|z|^2/4l_0^2} \quad (6)$$

여기서  $\mathcal{N}_m$ 은 규격화 상수이며,  $z$ 는  $z(= x - iy) = re^{-i\phi}$ 로 정의되는 2차원 위치변수이다. 함수  $|\Psi_{0m}(z)|^2$ 의 최대값은  $r_m \propto m^{1/2}$ 에서 나타난다. 정해진 LL에 속하는 서로 다른  $m$ 값을 가지는 단일입자 상태들은 에너지가 모두 같고 인접한 LL의 에너지 간격은  $\hbar\omega_c$ 이다.

넓이가  $S = \pi R^2$ 인 시편에서는  $n = 0$ 인 LL에 허용되는 단일입자 상태의 수를 자기선속 양자  $\phi_0(= hc/e)$ 을 써서 나타내면  $N_\phi = BS/\phi_0$ 이다. 란다우 준위 채움인수  $\nu$ 는  $\nu = N/N_\phi$ 로 정의되므로  $\nu^{-1}$ 는 가해진 정자기장에 의해 시편에 제공되는 전체 자기선속을 전자의 갯수로 나눈 값, 즉 전자 한개당 배당되는 평균 자기선속이다. 반지름이  $R$ 인 시편에 대하여 양자수  $|m|$ 이 가질 수 있는 값의 갯수는  $N_\phi$ 이다. 바닥 LL에 허용되는 값은  $|m| = 0, 1, 2, \dots, N_\phi - 1$ 이므로 LLL의 축퇴도는  $N_\phi$ 이다.

2차원 전자계의 넓이를 줄이면 이에 따라 LL당 허용되는 상태의 수  $N_\phi$ 도 감소한다. 그러므로 정수 개 만큼 LL이 채워진 계 ( $\nu = 1, 2, \dots$ )의 시편을 압축해서 넓이  $S$ 를 무한소 만큼 감소시키려면 에너지가 한 단계 높은 LL로 전자들을 옮겨야 하며 이때  $\hbar\omega_c$  만큼의 에너지가 소요된다. 그러므로 LL이 전자들로 가득 채워진 상태는 비압축 상태 (incompressible states)에 있게 된다. 이러한 2차원 전자계의 비압축성이 정수 양자 홀 효과 (integer quantum Hall effect; IQHE)를 일으키게 되는 근원이다 [10].

### III. 정수 양자 홀 효과

란다우 준위의 채움인수  $\nu$ 가 정수일 때는 전자들로 채워진 준위와 비어 있는 준위 사이에는  $\hbar\omega_c$ 만큼의 에너지 간격이 있다. 이러한 에너지 간격의 존재는 전자들로 이루어진 계가 비압축적 특성을 나타내게 한다. 실험에서 관측되는 자기 비저항 (magneto-resistivity)  $\rho_{xx}$ 의 최소값과 홀 비저항 (Hall resistivity)  $\rho_{xy}$ 의 계단 구조 (plateau structure)의 메카니즘을 이해하려면 결함이나 격자진동 등에 의한 산란을 통하여 각각의 LL에 확장 상태들 (extended states)과 국소 상태들 (localized states)이 공존할 필요가 있다 [11,12]. 확장 상태들은 폭이 넓어진 LL의 중심부에 놓이고 국소 상태들은 확장 상태 영역의 양쪽 주변에 놓인다. 계에 가해진 자기장  $B$ 나 입자들의 갯수  $N$ 을 변화시키면 계의 화학 퍼텐셜  $\zeta$ 가 LL을 지나가게 된다. 이렇게 화학 퍼텐셜이 LL을 지

나가면서 화학 퍼텐셜이 국소 상태 영역에 놓일 때마다 절대영도에서는  $\rho_{xx}$ 가 0이 되고  $\rho_{xy}$ 는 평평한 홀 계단 (Hall plateau)을 형성하게 된다.

이제까지는 단일입자 상태함수에 대하여 살펴보았다. 이제 여러 개의 전자들로 채워진 LL에 대한 다체 파동함수에 대하여 알아본다.  $N$ 개 전자들로 가득 채워져서  $\nu = 1$ 인 LLL의 파동함수  $\Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_N)$ 은 양자수  $m$ 이  $0 \leq |m| \leq N - 1$ 인  $N$ 개의 단일입자 상태에 각각 전자가 한개씩 들어있는  $N$ 개 상태함수들의 곱으로 나타낼 수 있다. 이때 다체 곱함수 (product function)는 어느 두 전자의 교환에 대하여 반대칭적 (antisymmetric)이어야 하며 이러한 조건을 만족하는  $\Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_N)$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi_1(z_1, \dots, z_N) = \mathcal{A}\{u_0(z_1)u_1(z_2) \cdot u_{N-1}(z_N)\} \quad (7)$$

위의 식에서  $\mathcal{A}$ 는 반대칭화 연산자이다. 식 (6)에 보인 바와 같이  $u_{|m|}(z) \propto z^{|m|}e^{-|z|^2/4l_0^2}$ 이므로 식 (7)을 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\Psi_1(z_1, \dots, z_N) \propto \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=1, N} |z_i|^2} \quad (8)$$

식 (8)에 쓰인 행렬식은 반 데르 몬드 (van der Monde) 행렬식이며 [13] 간단히  $\prod_{N \geq i > j \geq 1} (z_i - z_j)$ 로 표현할 수 있다.  $i$ 번째 열에서  $j$ 번째 열을 빼고  $z_{ij} = z_i - z_j$ 를 공통인수로 묶어 내면 이러한 사실을 바로 확인할 수 있다. 그러므로  $N$ 개 입자계 바닥상태 파동함수는 다음과 같다.

$$\Psi_1(z_1, \dots, z_N) \propto \prod_{N \geq i > j \geq 1} z_{ij} \exp^{-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{k=1, N} |z_k|^2} \quad (9)$$

식 (9)는, 이 식에 나타나는  $z_j$ 의 가장 높은 차수 먹이  $N - 1$ 이므로, 해당되는 LL이 전자들로 가득 찬 경우이다. 이런 사실은 양자수  $m$ 은  $|m|$ 이  $0, 1, 2, \dots, N - 1$ 이므로 LL의 축퇴도는  $N_\phi = N$ 이며  $\nu = N/N_\phi = 1$ 이기 때문이다. 단일입자 파동함수의 곱으로 표현되는 다체 파동함수가 Pauli의 배타원리를 만족하도록 반대칭화시킴으로써  $\nu = 1$ 인 상태를 나타내는 식 (9)를 얻어낼 수 있었다.

### IV. 분수 양자 홀 효과

란다우 준위 채움인수  $\nu$ 가 1보다 작은 경우에는 LLL의 축퇴도가 해당 LL에 들어 있는 전자들의 갯수보다 더 크므로 에너지가 가장 낮은 단일입자 상태들에  $N$ 개 입자를 채우는 통상적인 방법을 적용할 수 없다. 예를 들자면, 채움인수가  $\nu = 1/3$ 인 경우에  $3N$ 개 상태를  $N$ 개 전자가 차지하는 반대칭적인 함수꼴을 잡는 일은 자명하지 않다. 채움인수가  $\nu = 1/3$ 인 경우를 포함해서  $\nu = 1/n$  (단,  $n$ 은 홀수)로 표시되는 양자 홀 상태를 이해하고자 Laughlin [14]은 놀라운 물리학적 통찰력을 바탕으로 다음과 같은 파동함수를 제시하였다.

$$\Psi_{1/n}(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i>j} z_{ij}^n \exp^{-\sum_k |z_k|^2/4l_0^2} \quad (10)$$

위에 보인 Laughlin 파동함수는  $n$ 이 홀수인 경우이므로 임의의 두 전자의 교환 ( $i \leftrightarrow j$ )에 대하여  $z_{ji}^n \rightarrow -z_{ij}^n$ 이므로 반대칭 조건을 만족한다. 그리고  $z_{ij} \rightarrow 0$ 인 극한에서 파동함수가 0이 되도록 잡음으로써  $n > 1$ 이므로 전자들은 쿨롱 척력 상호작용이 최소화되도록 서로 멀리 떨어지려는 경향을 나타내고 있다. 아울러, 파동함수는  $z_i^m$  [단,  $0 \leq m \leq n(N-1)$ ]인 항을 포함하므로 LL의 양자수  $m$ 이 가질 수 있는 가장 큰 값인  $N_\phi - 1 = N_\phi - 1 = n(N-1)$ 이 된다. 따라서, 거시 계의 채움인수는  $\nu = N/N_\phi \rightarrow 1/n$ 이 되어 실험적인 관측결과와 일치한다 [15]. 또한 Laughlin은 QP 들뜸의 형태도 제시하고 바닥상태 에너지와 준전자 (quasielectron; QE)와 준홀 (quasihole; QH) 쌍을 생성하는 데 필요한 에너지 간격도 산출하였다. Laughlin이 제안한 기본전하의 분수배로 대전된 QP들은 분수 통계 (fractional statistics)를 따르는 애니온 (anyons)임이 밝혀진다 [16-20].

### V. 수치연산 연구

분수 양자 홀 상태에 대한 Laughlin의 가설은 LLL 상태들로 이루어진 Hilbert 부분공간 안에서 상호작용 하밀토니안을 수치 대각화 함으로써 쉽사리 확증된다 [21]. 양자 홀 계에 대한 실험은 2차원 평면 구조에서 이루어지지만 수치 대각화 연산 작업은 2차원 구면에서 실행하면 훨씬 편리하다.  $N$ 개 전자들이 반지름이  $R$ 인 구면 위에 놓여 있는 경우를 생각하자 (Fig. 1 참조). Haldane은 구의 중심에 세기가  $2Q\phi_0$  (단,  $2Q$ 는 정수)인 자기홀극 (magnetic monopole)이 놓여 있는 반지름이  $R$ 인 구면 위

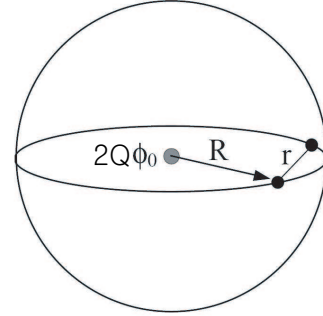


Fig. 1. Haldane sphere of radius  $R$  with magnetic monopoles (of strength  $2Q$ ) located at the center of the sphere.

에 몇 개의 전자들이 갇혀 있는 경우를 제안하였다 [21]. 구의 중심에 놓인 자기홀극에 의한 자기장은 다음과 같다.

$$\vec{B} = \frac{2Q\phi_0}{4\pi R^2} \hat{R} \quad (11)$$

Haldane 구면에 놓인 전자 1개에 대한 하밀토니안을 입자의 각운동량 연산자  $\vec{l}$ 과 지름방향 단위벡터  $\hat{R}$ 을 써서 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다 [22].

$$H_0 = \frac{1}{2mR^2} (\vec{l} - \hbar Q \hat{R})^2 \quad (12)$$

각운동량 연산자  $\vec{l}$ 은 다음과 같은 통상적인 교환관계를 만족한다.

$$[l_\alpha, l_\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma$$

$l^2$ 과  $l_z$ 의 고유값은 각각  $\hbar^2 l(l+1)$ 과  $\hbar m$ 이다. 식 (12)의 단일입자 상태  $|Q, l, m\rangle$ 를 홀극 조화함수 (monopole harmonics)라 일컬으며  $H_0$ 의 고유값은 다음과 같다.

$$\epsilon(Q, l, m) = \frac{\hbar\omega_c}{2Q} [l(l+1) - Q^2] \quad (13)$$

$|Q, l, m\rangle (\equiv |l, m\rangle)$ 은  $H_0$ 의 고유함수일 뿐만 아니라  $l^2$ 과  $l_z$ 의 고유함수이기도 하다. 에너지 고유값  $\epsilon(Q, l, m)$ 은 양수 값이어야 하므로 허용되는  $l$  값은,  $n = 0, 1, 2, \dots$  일 때,  $l_n = Q + n$ 이다. 가장 낮은 LL의 경우 ( $n = 0$ )는  $l_0 = Q$ 이고 에너지는  $m$ 에 무관하게  $\epsilon_0 = \hbar\omega_c/2$ 이다. 일반적으로  $n$ 번째 들뜬 LL은  $l_n = Q + n$ 이며 대응되는 에너지는 다음과 같다.

$$\epsilon_n = \frac{\hbar\omega_c}{2Q} [(Q+n)(Q+n+1) - Q^2] \quad (14)$$

$n = 0$ 인 LLL은  $\vec{l}$ 의  $z$ -성분인  $l_z$ 의 고유값을 나타내는  $m = -Q, -Q+1, \dots, Q-1, Q$ 에 속하는  $2Q+1$  개의 축

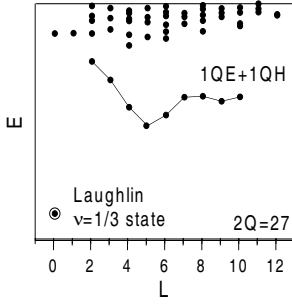


Fig. 2. The energy spectrum of 10 electrons in the lowest LL calculated on a Haldane sphere with  $2Q = 27$ . The open circle denotes the  $L = 0$  ground state.

되된 단일입자 상태를 가진다. 가장 낮은 에너지의 LL에 대한  $N$ -입자 상태함수는, 단일입자 상태  $|Q, l_0, m_i\rangle$ 를 바탕으로, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle = c_{m_N}^\dagger \cdots c_{m_2}^\dagger c_{m_1}^\dagger |0\rangle \quad (15)$$

위의 식에서  $|m_i| \leq Q$ 이며  $c_{m_i}^\dagger$ 는 상태  $|l_0, m_i\rangle$ 에 전자 1개를 생성시키는 연산자이다.

전자들이 모두 가장 낮은 LL을 부분적으로 채우고 있는 경우를 생각하자.  $(2Q + 1)$ 개 상태에 반대칭성을 만족하도록  $N$ 개 전자들을 채우는 방법의 가지수는 다음과 같다.

$$G_{NQ} = \binom{2Q+1}{N} = \frac{(2Q+1)!}{N!(2Q+1-N)!} \quad (16)$$

그러므로 LLL을 나타내는 Hilbert 부분공간은  $G_{NQ}$  개의  $N$ -전자 다체상태로 이루어져 있다. 자기홀극의 세기가  $2Q = 9$ 이어서  $l = 4.5$ 인 4개 전자들로 이루어진 계 ( $N = 4$ 일 때의  $\nu = 1/3$  상태)의 바닥상태 축퇴도와 다체상태 다중도  $G_{NQ}$ 는 각각  $2Q + 1 = 10$ 과  $G_{NQ} = 10!/[4!(10-4)!] = 210$ 이다.

수치 대각화는 이들  $G_{NQ}$  차원 공간에서 전자들 사이의 상호작용 하밀토니안

$$H_{\text{int}} = \sum_{i>j} \frac{e^2}{r_{ij}}$$

을 대각화하는 작업이다. 실제 수치연산 과정은 계의 총 각운동량  $\hat{L} (= \sum_i \hat{l}_i)$ 의 고유함수  $|LM\alpha\rangle$ 를 먼저 결정함으로써 작업을 신속하게 진행시킬 수 있다. 여기서  $M = \sum_i m_i$ 이며  $\alpha$ 는 총 각운동량  $L$ 이 같으면서 서로 구분되는  $L$ -다중도를 나타내기 위한 인수이다. 예를 들자면, 위에 예시한  $l = 4.5$ 인 전자 4개로 이루어진 계의 총 각운동량  $L$ 은 다음과 같다.

$$L = 12 \oplus 10 \oplus 9 \oplus 8^2 \oplus 7 \oplus 6^3 \oplus 5 \oplus 4^3 \oplus 3 \oplus 2^2 \oplus 0^2$$

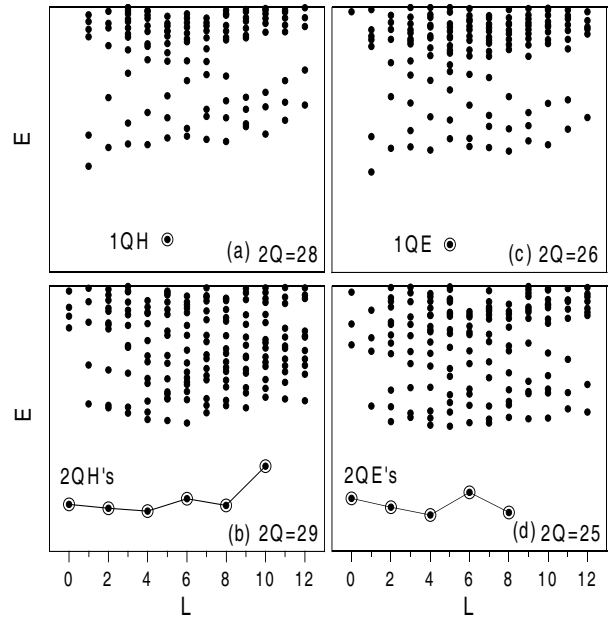


Fig. 3. The energy spectra of 10 electrons in the lowest LL calculated on a Haldane sphere with the fewest composite Fermion quasiparticles.  $2Q = 28, 29, 26, 25$ . The open circles and solid lines mark the lowest energy bands with the fewest for:  $2Q = 28$  &  $n_{\text{QH}} = 1$  in (a),  $2Q = 29$  &  $n_{\text{QH}} = 2$  in (b),  $2Q = 26$  &  $n_{\text{QE}} = 1$  in (c), and  $2Q = 25$  &  $n_{\text{QE}} = 2$  in (d).

모두 18개의 구분되는 각운동량 다중도를 가진다. 예를 들면,  $6^3$ 은  $L = 6$ 인 경우가 3가지 가능함을 의미하며 이들을 서로 다른  $\alpha$  값으로 구분한다.

$H_{\text{int}}$ 이 스칼라 함수이므로 이의  $|LM\alpha\rangle$ 에 대한 행렬 요소는 Wigner-Eckart 정리에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다 [4,23,24].

$$\langle L'M'\alpha' | H_{\text{int}} | LM\alpha \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \langle L'\alpha' | H_{\text{int}} | L\alpha \rangle \quad (17)$$

$\langle L'M'\alpha' | H_{\text{int}} | LM\alpha \rangle$ 는  $M$ 에 의존하지 않으며  $L = L'$ 인 경우에만 유한하므로 대각화 해야 할 행렬의 크기가 크게 줄어든다. 위에 예시한  $(N; 2Q) = (4; 9)$ 인 계의 210개 다체상태인 경우의  $18 \times 18$  행렬은 2개의  $3 \times 3$ , 3개의  $2 \times 2$ , 6개의  $1 \times 1$  구역 (block)으로 구역 대각화된다.  $N = 10$ 일 때의  $\nu = 1/3$  상태인  $2Q = 27$ 에서는  $2Q + 1 = 28$ 이고  $G_{NQ} = 28!/[10!(28-10)!] = 13, 123, 110$ 이며  $0 \leq L \leq 90$ 에 걸친 246,448개의  $L$ -다중도를 가진다. 그러나, 식 (17)에 따라 실제 대각화해야 할 가장 큰 행렬은  $7069 \times 7069$ 이다. 전자의 갯수가 많지 않은 경우에 대한 이러한 유한 행렬은 쉽게 대각화할 수 있으며 이의 다체 고유함수와 고유값을 얻는다.

Fig. 2와 3은 Haldane 구면 상에 있는 10개의 전자들이 바닥 LL 상태에 놓인 경우에 대하여 수치 대각화 계산으

로 얻은 낮은 에너지 스펙트럼을 총 각운동량  $L$ 의 함수로 나타낸 것이다. 스펙트럼의 일반적인 특징은 i) 분명히 드러나는 낮은 에너지 구역이 보이고 ii) 그 위에 조금 덜 분명한 들뜬 에너지 구역이 관측된다는 점이다. Fig. 2에 보인 바와 같이  $L = 0$ 인 Laughlin 비압축성 바닥상태가 채움인수  $\nu = 1/3$ 인  $2Q = 3(N - 1) = 27$ 에서 명확히 드러난다.  $2Q$  값이 차츰 증가해서  $2Q = 28, 29, 30$ 이면 QH이 각각 1, 2, 3개 들떠 있는 상태가 된다. Fig. 3(a)는  $2Q = 28$ 에서 각운동량이  $l_{QH} = 5$ 인 QH 1개가 뚜렷하게 관측됨을 나타내며, Fig. 3(b)는  $2Q = 29$ 에서 각운동량이  $l_{QH} = 11/2$ 인 QH이 2개 있는 경우를 나타낸다. 한편,  $2Q$ 가 비압축성 상태인 27보다 감소하면 바닥상태에 QE들이 생성된다. Fig. 3(c)와 (d)의 낮은 에너지 구역은 각각  $2Q = 26$ 과  $2Q = 25$ 일 때  $l_{QE} = 5$ 인 QE 1개와  $l_{QE} = 9/2$ 인 QE이 2개 있는 경우이다.  $2Q$ 가 감소해서  $2Q = 21$ 이 되면  $\nu = 2/5$ 에 해당하는  $L = 0$  바닥상태가 관측된다 (뒤에 보인 Fig. 9(b) 참조).

이미 앞절에서 보인 바와 같이 평면 구조에서는 단일입자 각운동량의  $z$ -성분 양자수  $m$ 에 허용되는 값이 각각  $0, 1, \dots, N_\phi - 1$ 이며, 채워진 모든 상태에 대한  $m$ 의 합  $M (= \sum_i m_i)$ 은  $L$ 의  $z$ -성분을 나타낸다.  $M$ 은  $M = M_{CM} + M_R$ 과 같이 질량중심 운동과 상대운동의 기여로 구분할 수 있다. 평면 구조와 구면 구조는 다음과 같은 관계로 연결된다.

$$M = Nl + L_z; \quad M_R = Nl - L; \quad M_{CM} = L + L_z$$

상호작용은 오직  $M_R$  [25]에만 의존하므로 평면 구조 표현  $|M_R, M_{CM}\rangle$ 은 곧 구면 구조 표현  $|L, L_z\rangle$ 의 역할을 한다. 구면 구조는 경계가 없다는 점과 완전한 회전대칭성을 가진다는 측면에서 양자 홀 상태를 이론적으로 규명하기에 안성맞춤이다. 그러나, 실험가들은 평면 구조에 해당하는  $|M_R, M_{CM}\rangle$  표현을 선호하는 경향이 있다.

### VI. 2차원 동등입자에 대한 통계규칙

3차원 공간내  $\vec{r}_1$ 과  $\vec{r}_2$ 에 놓인 2개의 동등입자를 초기 상태  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ 에서 동일한 나중 상태  $(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2)$ 로 바꾸는 경로에 대한 진폭은  $\vec{r}'_{12} (= \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)$ 의 회전각도  $\phi$ 가 0인가  $\pi$ 인가에 따라 결정된다. 회전각도  $\phi$ 는  $2\pi$ 만큼의 mod로 정의되며 중요한 것은 마지막 점이 교환과정을 나타내는  $\phi = \pi$ 인지 그렇지 않으면 비교환과정을 나타내는  $\phi = 0$ 인가 하는 점이다.

2차원에서는 주어진 궤적에 있어서 그 회전각도  $\phi$ 가 명확하게 정의된다. 각도  $\phi$ 가 원점 주위를 감아둔 횟

수 (winding number)가 얼마인지를 추적해 갈 수 있다.  $|\vec{r}_{ij}|$ 가 0이 되지 않고 유한한 값을 가지는 범위내에서는 입자 궤적들로 이루어진 공간은 상호간에 (서로 일그러져 들어가는 것이 불가능하도록) 단절된 부분공간으로 나뉜다. 각각의 부분은 감아도는 횟수가 고유한 값을 가진다. 경로적분 (path integral)을 구성할 때 궤적들의 가중도는  $e^{i\theta\phi/\pi}$ 의 형태로 (새로운) 통계 인수 (statistical parameter)  $\theta$ 에 의존한다.  $\theta$ 는 mod  $2\pi$ 로 정의되는 양이다. 특별히  $\theta = 0$ 이면 통상적인 보제 입자 (Bose particles; boson) 통계이고  $\theta = \pi$ 이면 페르미 입자 통계를 따르게 된다. 일반적인 경우에는 다음과 같다.

$$P_{12}\psi(1, 2) = e^{i\theta}\psi(1, 2) \quad (18)$$

$\theta$ 가 임의의 값을 가지면서 위와 같은 관계를 따르는 입자를 에니온 (anyon)이라 하며, 에니온은 새로운 양자 통계인 에니온 통계 (anyon statistics)를 따른다 [16,19,20].

에니온 통계를 실현하는 단순한 방법은 상대좌표가  $\vec{r} [= (r, \phi)]$ 인 상호작용하는 두 입자의 상대운동을 기술하는 단순 라그랑지안 (Lagrangian)  $\mathcal{L}$ 에  $\hbar\beta\dot{\phi}$  (단,  $\beta = q\Phi/\hbar c$  및  $0 \leq \beta \leq 1$ )를 추가하는 것이다. [4] 여기서  $\beta (\equiv \theta/\pi)$ 는 에니온 인수 (anyon parameter)이고  $q$ 와  $\Phi$ 는 가상 전하와 자기선속이다. [16,20] 예를 들자면, 다음과 같은 경우이다.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) + \hbar\beta\dot{\phi} \quad (19)$$

추가된 가상적인 전하-자기선속 항을 CS 항이라 한다. 이 CS 항은  $q$ 와  $\Phi$ 가 시간에 의존하지 않으므로 고전 운동방정식에는 아무런 영향을 주지 않는다. 그러나, 정준 각운동량 (canonical angular momentum)은  $p_\phi (= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}) = \mu r^2 \dot{\phi} + q\Phi/2\pi c$ 로 된다. 입자  $e^{2\pi i p_\phi / \hbar}$ 는  $2\pi$ 만큼의 회전을 야기하므로  $\hbar^{-1}p_\phi$ 의 고유값은 정수 ( $\ell$ )이어야 한다. 한편, 게이지 불변인 운동학적 각운동량 (kinetic angular momentum)은  $p_\phi - q\Phi/2\pi c$ 이며 분수 값을 가질 수 있게 되고 이 경우에 입자들은 분수 통계 (fractional statistics)를 따르게 된다. 고전 운동방정식과는 달리 CS 항에 의해 달라진  $\mathcal{L}$ 은 입자의 양자통계 규칙을 변화시킨다.

### VII. Chern-Simons 게이지 이론

특정한 통계규칙을 따르면서 다음과 같은 하밀토니안으로 기술되는 2차원 입자들을 생각하자.

$$H = \frac{1}{2\mu} \sum_i \left[ \vec{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \right]^2 + \sum_{i>j} V(r_{ij}) \quad (20)$$

가상적인 전하  $q$ 와 자기선속  $\Phi$ 를 나르는 선속 관 (flux tube)을 각각의 입자에 배당함으로써 이들 입자계의 통계규칙을 바꿀 수 있다.  $j$ 번째 입자에 배당한 선속  $\Phi$ 를 나르는 선속 관에 의해서  $i(\neq j)$ 번째 입자가 있는 위치에 생성되는 가상적인 (게이지) 벡터퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r}_i)$ 는 다음과 같다.

$$\vec{a}(\vec{r}_i) = \Phi \sum_{j \neq i} \frac{\hat{z} \times \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \quad (21)$$

게이지 퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r}_i)$ 에 대응하는 CS 게이지 자기장은 다음과 같다.

$$\vec{b}(\vec{r}) = \Phi \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \hat{z} \quad (22)$$

위의 식에서  $\vec{r}_i$ 는 게이지 퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r}_i)$ 를 지니고 있는  $i$ 번째 입자의 위치벡터이다. 어떠한 두 전자도 같은 위치를 차지할 수 없고 다른 전자에 의한  $\delta$ -함수 형태의 게이지 자기장을 감지할 수 없으므로 자기장  $\vec{b}(\vec{r})$ 는 고전 운동 방정식에 아무런 영향을 주지 않는다.

벡터퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r})$ 를 다음과 같이 다시 써보자.

$$\vec{a}(\vec{r}_i) = \Phi \int d^2r_1 \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1) \quad (23)$$

위의 식에서  $\psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1)$ 는 전자액체의 밀도 연산자  $\rho(r_1)$ 이며, 게이지 퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r})$ 는 양자역학적인 계의 파동함수에 위상변화를 일으킨다 [20].

Chern-Simons 변환 (Chern-Simons transformation; CS 변환)은 전자 생성 연산자  $\psi_e^\dagger(\vec{r})$ 를 다음과 같은 복합입자 (composite particle) 생성 연산자  $\psi^\dagger(\vec{r})$ 로 변환시키는 특이 게이지 변환이다 [26].

$$\psi^\dagger(\vec{r}) = \psi_e^\dagger(\vec{r}) \exp^{i\alpha \int d^2r' \arg(\vec{r} - \vec{r}') \psi_e^\dagger(\vec{r}') \psi_e(\vec{r}')} \quad (24)$$

위의 식에서  $\arg(\vec{r} - \vec{r}')$ 은 벡터  $\vec{r} - \vec{r}'$ 이  $x$ -축과 이루는 각도이며  $\alpha$ 는 임의의 게이지 인수이다. 전자의 운동에너지 연산자  $K_e$ 를 CS 변환하면 다음과 같다.

$$K_{CS} = \frac{1}{2\mu} \int d^2r \psi^\dagger(\vec{r}) \left[ -i\hbar + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) + \frac{e}{c} \vec{a}(\vec{r}) \right]^2 \psi(\vec{r}) \quad (25)$$

위의 표현에서 게이지 벡터퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r})$ 는 다음과 같다.

$$\vec{a}(\vec{r}) = \alpha \phi_0 \int d^2r' \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \psi^\dagger(\vec{r}') \psi(\vec{r}')$$

CS 변환은 각각의 입자에 가상 자기선속  $\Phi (= \alpha \phi_0)$ 를 지니고 있는 선속 관과 (다른 입자에 부착된 선속 관에 의한 벡터퍼텐셜과 결합할 수 있도록) 가상전하  $-e$ 를 부착시키는 내용을 수행하는 변환이라 볼 수 있다.  $\vec{a}(\vec{r})$ 는 다

른 입자들에 부여된 CS 선속에 의해서 위치벡터가  $\vec{r}$ 인 곳에 형성되는 총 게이지 퍼텐셜이다.

CS 게이지 변환으로 얻는 새로운 하밀토니안은 식 (20)의  $\frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i)$ 을  $\frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) + \frac{e}{c} \vec{a}(\vec{r}_i)$ 로 대체한 경우이며 다음과 같다.

$$H_{CS} = \frac{1}{2\mu} \int d^2r \psi^\dagger(\vec{r}) \left[ \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) + \frac{e}{c} \vec{a}(\vec{r}) \right]^2 \psi(\vec{r}) + \sum_{i>j} V(r_{ij}). \quad (26)$$

부가적인 CS 항의 알짜 효과는 식 (18)에 도입된 입자들의 통계 인수  $\theta$ 를  $\theta + \pi \Phi \frac{q}{\hbar c}$ 로 바꾸는 것이다.  $p$ 가 정수인 경우  $\Phi$ 가  $p \frac{\hbar c}{e}$ 이면  $\theta \rightarrow \theta + \pi pq/e$ 로 된다. 그러므로,  $q = e$ 이고  $p = 1$ 이라면  $\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi$ , 즉 보제 입자 통계를 페르미온 통계로 변환시키거나  $\theta = \pi \rightarrow \theta = 2\pi$ , 즉 페르미 입자 통계를 보제 입자 통계로 변환시킨다.  $p = 2$ 인 경우에는 입자들의 통계가 CS 항 때문에 변하지는 않는다.

하밀토니안  $H_{CS}$ 는  $\vec{a}(\vec{r})^0$ ,  $\vec{a}(\vec{r})^1$  및  $\vec{a}(\vec{r})^2$ 에 비례하는 항들을 포함하고 있다.  $\vec{a}(\vec{r})^1$  항은 전형적인 2체 상호작용 항이며,  $\vec{a}(\vec{r})^2$  항은 다음과 같은 항을 포함하므로 3체 상호작용 항이다.

$$\Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}_1) \Psi(\vec{r}_1) \Psi^\dagger(\vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_2)$$

3체 항은 그 물리적 특성 기술이 매우 난해하므로 흔히들 기초 논의에서 제외한다. 게이지 변환 방법으로 흔히 도입되는 CS 하밀토니안은 게이지 퍼텐셜 항이 없는 본래의 하밀토니안인 식 (20)에 비하면 상당히 복잡한 꼴이다. 그러나, 평균장 근사 방법을 택하면 CS 하밀토니안은 매우 단순해진다. 평균장 근사에서는 식 (23)에 나타나는 전자 밀도  $\rho(r)$ 를 이의 평균값인 균일한 평형상태 전자밀도  $n_S$ 로 치환해서 취급한다. 이때 평균장 하밀토니안은 외부 자기장  $B$ 를 유효 자기장  $B^*(\equiv B + n_S \Phi)$ 로 대체한 단일입자 하밀토니안들의 단순 합이다.

## VIII. Jain의 복합 페르미 입자 이론

Jain은  $\alpha (= 2p)$ , 즉 짝수 선속 양자  $\phi_0$ 를 담고 있는 선속 관이 (외부에서 가한 정자기장의 반대 방향으로 향하도록) 부착된 전자를 표현하는 복합 페르미 입자를 착안하였다 [27-30]. 평균장 근사법을 쓰면 유효 채움인수  $\nu^*$ 를 전자 채움인수  $\nu$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nu^{*-1} = \nu^{-1} - \alpha \quad (27)$$

이때 CF 1개가 차지하는 선속 수는 정자기장에 의해 전자 1개가 차지하는 선속 수에서 전자마다 배당된 CF 선

Table 1. The effective CF monopole strength  $2Q^*$ , the number of CF quasiholes  $n_{QH}$  and quasielectrons  $n_{QE}$ , the quasiparticle angular momenta  $l_{QE}$  and  $l_{QH}$ , and the angular momenta  $L$  of the lowest-lying band of multiplets for a 10-electron system at  $2Q$  between 29 and 25.

$2Q$	29	28	27	26	25
$2Q^*$	11	10	9	8	7
$n_{QH}$	2	1	0	0	0
$n_{QE}$	0	0	0	1	2
$l_{QH}$	5.5	5	4.5	4	3.5
$l_{QE}$	6.5	6	5.5	5	4.5
$L$	10,8,6,4,2,0	5	0	5	8,6,4,2,0

속 수를 뺀 값이다.  $\nu^*$ 가 정수 ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ )일 때의  $\nu \left( = \frac{n}{1+\alpha n} \right)$  ( $\alpha = 2$ )는  $\nu = 1/3, 2/5, 3/7, \dots$ 와  $\nu = 1, 2/3, 3/5, \dots$ 인 분수 양자 홀 상태에 대응한다. 이들 분수 채움 상태는 실험실에서 가장 두드러지게 관측되는 분수 양자 홀 상태들이다.

Haldane 구면 구조에서 어느 한 CF가 본 유효 홀극 세기 (effective monopole strength)  $2Q^*$ 는 전자가 본 홀극 세기  $2Q$ 에서 나머지 CF에 부착된 선속 양자 갯수  $\alpha (= 2p)$ 만큼을 빼야 하므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$2Q^* = 2Q - \alpha(N - 1) \quad (28)$$

따라서 가장 낮은 LL 전자 껍질 (electron shell)의 각운동량이  $Q = l_0$ 인 데 비해 가장 낮은 CF 껍질 (CF shell)의 각운동량은  $|Q^*| \equiv l_0^*$ 이다.  $2Q$ 가  $(1 + \alpha) \times (N - 1)$ 이면, 즉,  $2Q^* = N - 1$ 이면 CF  $l_0^*$  준위는 CF로 가득 채워지며 전자 채움인수가  $\nu = (1 + \alpha)^{-1}$ 인 비압축성 Laughlin 상태가  $L = 0$ 에서 관측된다.  $2|Q^*| + 1$ 가  $N$ 보다 크면 (작으면) QE (QH)이  $l_{QE} = l_0^* + 1$  ( $l_{QH} = l_0^*$ ) 준위에 만들어진다. 에너지 스펙트럼의 낮은 에너지 띠 부분은  $2Q^*$ 와  $N$ 에 의해 결정되는 적은 수의 QP 들뜸 상태들로 이루어져 있다. 첫째 들뜬 에너지 띠를 이루는 상태들은 추가적인 QE-QH 쌍에 의한 것이다. 동등 페르미 입자인 준입자의 갯수 ( $n_{QH}$  또는  $n_{QE}$ )에 따라  $l_{QH}$ 나  $l_{QE}$ 를 더함으로써 이들 낮은 에너지 상태들이 나타날 총 각운동량 값을 예측해낼 수 있다. Table 1은  $N = 10$ 과  $29 \geq 2Q \geq 25$ 인 경우에 대한 유효 CF 홀극 세기, CF 준입자 갯수와 단일입자 각운동량 ( $l_{QH}$  및  $l_{QE}$ ), 총 각운동량  $L$ 을 예시한 결과이다. Table 1을 Fig. 2와 3에 보인 에너지 스펙트럼의 낮은 에너지 영역의 상태들과 비교하면 CS 변환에 대한 평균장 근사의 예측이 만족스러움을 확인할 수 있다.

CS 모형에 대한 평균장 근사법이 이처럼 상호작용하는 전자들의 낮은 에너지 영역 스펙트럼을 잘 설명할 수

있다는 사실은 매우 놀라운 일이다. 식 (26)으로 기술되는 계에는 정전기적인 꼴롱 상호작용과 CS 게이지 상호작용을 통해서 평균장 근사에 포함되지 않은 요동항들이 분명히 존재한다. CS 평균장 근사는 분수 양자 홀 다체계에 꼴롱 에너지 척도  $e^2/l_0$  ( $\propto B^{1/2}$ )와 더불어 유효 자기장  $B^*$ 에 비례하는 새로운 특성 에너지 척도  $\hbar\omega_c^*$ 가 도입된다. 외부에서 가한 정자기장이 매우 센 경우에는 새로 도입된 에너지 척도  $\hbar\omega_c^*$ 는  $e^2/l_0$ 을 크게 능가한다. 그러나,  $\hbar\omega_c^*$ 는 낮은 에너지 스펙트럼을 결정짓는 데 전혀 적합하지 않은 에너지 척도이다. 그럼에도 불구하고 낮은 에너지 스펙트럼의 구조를 CS 평균장 근사 이론이 성공적으로 설명할 수 있는 근본 원인은 아직 명쾌히 풀리지 않았다. FQHS에 대한 초기 CF 이론의 대전제인 “CF 변환은 강하게 상호작용하는 전자들을 상호작용이 약한 CF들로 전환한다”는 그 물리적인 근거가 모호해진다. 상당수의 실험결과가 CF 평균장 모형을 써서 설명되므로 CF 평균장 이론이 성공적인 근본 이유를 알아내고 그 모형의 적용 범위와 취약한 점을 밝히는 일은 매우 중요하고 의미있는 일이다.

Halperin, Lee, Read는 CF 액체에 있어서 전자 채움인수가  $\nu = 1/2$ 에 대응하는  $B^* = 0$ 일 때의 평균장 근사에 포함되지 않은 상호작용을 고찰하였다 [26]. 한편 이들보다 앞서 Lopez과 Fradkin은 동일한 접근 방법을 써서 정수 CF 채움인수  $\nu^*$ 의 응축상태를 탐구하였다 [31]. 이들 양자 홀 계에 대한 다체 계산은 통상적으로, 섭동으로 취급될 수 있는 작은 항을 찾을 수 없음에도 불구하고, 무작위 위상 근사 (random phase approximation) 방법으로 이루어지고 있다. Jain은 좀 다른 탐구 방법을 택하였다. Jain은 식 (10)에 보인 Laughlin 함수  $\psi_{1/n}$ 와 유사한 시행함수 (trial function)를 제안하였다. Jain의 시행함수는  $n$ 개의 가득 채워진 LL을 기술하는 Slater 행렬식에 Jastrow 인자  $Z_{2m} = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2m}$ 를 곱한 함수를 써서 얻는다. 이렇게 얻은 시행함수를 본래의 자기장  $B$ 에 대한 바닥 LL에 투영하였으며, 이 시행함수를 써서 채움인수가  $\nu = n(1 \pm 2mn)^{-1}$ 인 분수 양자 홀 상태의 에너지를 계산하였다. 시행함수가 바닥 LL의 Hilbert 부분공간에 속하도록 처리함으로써 무의미한 평균장 에너지 척도  $\hbar\omega_c^*$ 를 피해 갈 수 있었다.

## IX. 슈도퍼텐셜

구대칭 구조에 있는 전자 한쌍의 상태는 쌍 각운동량 (pair angular momentum)  $L' (= L_{12})$ 를 써서 그 특성이 표현된다. 각운동량이  $l$ 인 페르미 입자로 이루어진 페르미 입자 한쌍에 대한  $L'$ 를 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 을 써서 나



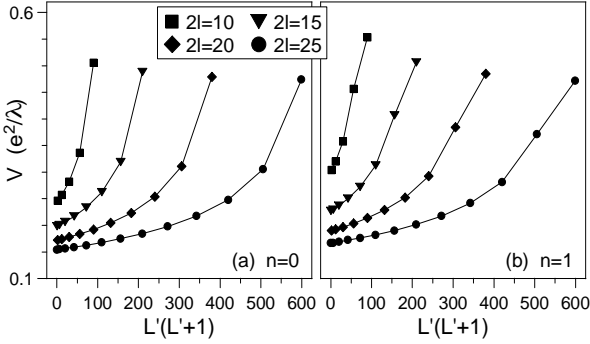


Fig. 4. Pseudopotential  $V(L')$  of the Coulomb interaction in the lowest (a) and the first excited Landau level (b) as a function of squared pair angular momentum  $L'(L'+1)$ . Squares ( $l = 5$ ), triangles ( $l = 15/2$ ), diamonds ( $l = 10$ ), and circles ( $l = 25/2$ ) indicate data for different values of  $Q = l + n$ .

타내면  $L' = 2l - \mathcal{R}$ 이다. (여기서 상대 각운동량은 홀수임.) 식 (17)에 보인 바와 같이 이들 쌍의 상호작용 에너지  $V_n(L')$ 은  $L'$ 과 LL 지수  $n$ 에만 의존한다. 두 입자의 상호작용 에너지가 슈도퍼텐셜  $V_n(L')$ 이다. Fig. 4는 바닥 LL( $n = 0$ )과 첫째 들뜬 LL( $n = 1$ )에 있는 한쌍의 입자들에 대한 슈도퍼텐셜  $V_n(L')$ 을 쌍 각운동량의 제곱  $L'(L'+1)$ 의 함수로 나타낸 결과이다. 두 상수  $A$ 와  $B$ 를 택할 때  $V_H = A + BL'(L'+1)$  형태로 표현되는 조화 슈도퍼텐셜 (harmonic pseudopotential)  $V_H(L')$ 은 조화 상호작용 척력퍼텐셜,  $V_H(r) = V_H(0) - br^2$  ( $b$ 는  $b > 0$ 인 상수)에 대응하는 슈도퍼텐셜이다.

각운동량이 쌍 각운동량 값  $L' (= 2l - \mathcal{R})$ 에 접근함에 따라 슈도퍼텐셜  $V(L')$ 가  $L' - 2$ 일 때의 값인  $V_n(L' - 2)$ 보다 더 빠르게 증가하는 경우에  $V(L')$ 는 “초조화적” (superharmonic)이라 하며, 반대로,  $V_n(L' - 2)$ 보다 더 느리게 증가하는 경우는 “버금조화적” (subharmonic)이라 한다.  $L' = 2l - \mathcal{R}$ 인 관계를 써서 슈도퍼텐셜을 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 의 함수로 나타낸  $V(\mathcal{R})$ 이 편리한 경우도 있다. 퍼텐셜  $V$ 의 비조화성 (anharmonicity)와 상관작용 사이의 관계는 계의 기하적 구조에 의존하지 않는다. 다만,  $V_H(\mathcal{R})$ 의 구체적인 표현은 기하적 구조에 따라 다르다. 평면 구조에서는  $V_H(\mathcal{R})$ 는  $\mathcal{R}$ 에 비례하나 Haldane 구면 구조에서는  $L'(L'+1)$ 에 비례한다 [32]. Fig. 5 (a)와 (b)는 바닥 LL에 있는 전자와 첫째 들뜬 CF LL에 있는 QE의 슈도퍼텐셜을 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 의 함수로 각각 나타낸 것이다. QE의 슈도퍼텐셜은 참고문헌 [33]의 계산 결과를 써서 추출한 것이다.  $n = 0$  LL 상태에 있는 전자들의 슈도퍼텐셜은  $L'$  값에 관계없이 항상 초조화적인 반면, Laughlin QP의 상호작용을 나타내는 QE의 슈도퍼텐셜  $V_{QE}(L')$ 는 허용되는 모든  $L'$  값에서 초조화 형이 아님을 알 수 있다 [5,24,32-40].

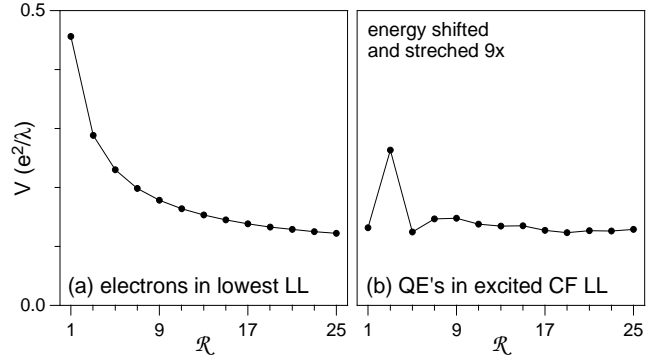


Fig. 5. Pseudopotentials as a function of relative pair angular momentum  $\mathcal{R}$  for electrons in the lowest LL (a) and for QE's in the first excited CF LL (b). The values of  $V$  in frame (b) were calculated by Lee *et al.* [33] and are only known up to a constant.  $\lambda$  is the magnetic length.

끌롱 상호작용 ( $\propto r^{-1}$ )의 슈도퍼텐셜  $V_H(\mathcal{R})$ 는 입자들이 속하는 LL에 따라 다르다.  $n = 0$  LL에서는  $\mathcal{R}$ 에 관계없이 초조화적이다.  $n = 1$  LL인 경우에는  $\mathcal{R} > 5$ 에서는 초조화적이나  $5 \geq \mathcal{R} \geq 1$ 에서는 조화적이다. Fig. 4(a)에서 알 수 있는 바와 같이 바닥 LL 상태에 있는 입자의  $V_0(\mathcal{R})$ 은 항상 초조화적이다. 첫째 들뜬 LL에 있는 입자의 경우에는  $V_1(\mathcal{R})$ 은  $\mathcal{R} > 1$ 일 때만 초조화적이다. Fig. 4(b)에서  $L'$ 가 가장 큰 값 부근 (예를 들자면,  $2l = 20$ 인 경우에  $17 \leq L' \leq 19$ , 또는  $2l = 25$ 인 경우에  $22 \leq L' \leq 24$ )에서 확인할 수 있는 바와 같이  $L' = 2l - 3$ 와  $L' = 2l - 1$  사이에서  $V_1(L')$ 이 증가하지만 그 증가 정도가 조화적이거나 버금조화적이다. 더 높い 들뜬 LL( $n = 2, 3, 4, \dots$ )에 대한  $V_n(L')$ 은  $L'$ 가 매우 큰 영역에서  $n = 1$ 인 경우보다 더 느리게 증가하거나 오히려 감소한다. 슈도퍼텐셜이 이러한 특성을 나타내는 까닭은  $n > 0$ 인 들뜬 LL 상태의 파동함수는 마디 (node)의 갯수가 하나씩 증가하며 이에 따라 해당 LL 상태에 있는 전자들의 전하밀도의 공간분포 구조가 변하기 때문이다. 입자들 사이의 거리가 전하밀도의 공간분포 구조의 특성길이와 비슷하게 되면 입자들 사이의 척력이, 구조가 없는 경우에 비해서, 상대적으로 약해진다.

Fig. 6(a)와 (b)는 전자 12개가 자기홀극의 세기가  $2l = 29$ 인 Haldane 구면 상에 있는 경우의 낮은 에너지 스펙트럼과 QE 4개가 자기홀극의 세기가  $2l_{QE} = 9$ 인 Haldane 구면에 놓인 경우에 대한 에너지 스펙트럼을 계의 총 각운동량  $L$ 의 함수로 나타낸 것이다. CF변환을 전자에 적용하면 유효 CF 각운동량은  $l^* = l - (N - 1) = 7/2$ 이 된다. 가장 낮은 CF LL은  $2l^* + 1 = 8$ 개의 입자를 받을 수 있으므로 첫째 들뜬 CF LL에는 날개의 각운동량이  $l_{QE} = 9/2$ 인 나머지 4개의 QE들이 놓인다.  $N = 12$  및

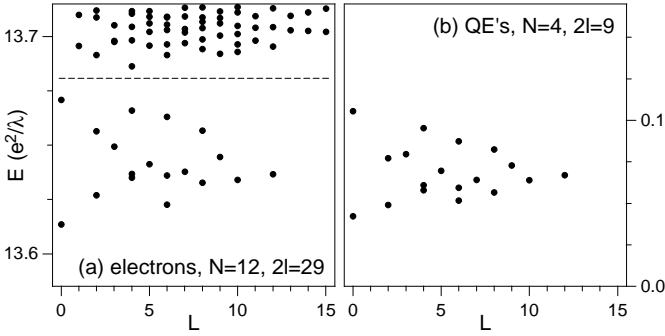


Fig. 6. Energy spectra for  $N = 12$  electrons in the lowest LL with  $2l = 29$  and for  $N = 4$  QE's in the first excited CF LL with  $2l = 9$ . The energy scales are the same, but the QE spectrum is obtained using  $V_{QE}(\mathcal{R})$  up to an arbitrary constant.

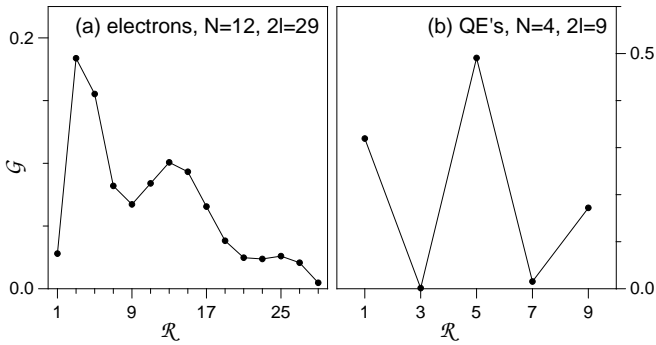


Fig. 7. Pair amplitude functions  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$  as a function of relative pair angular momentum  $\mathcal{R}$  for the two ground states shown in Fig. 6.

$2l = 29$ 인 경우에 비하면  $2l_{QE} = 9$ 와  $N_{QE} = 4$ 에 대한 수치연산은 매우 단순하다. 그러나, 두 경우에 대한 낮은 에너지 스펙트럼은 매우 흡사하다. 이런 결과를 보면 CF QP을 기술하는 데 슈도퍼텐셜  $V_{QP}(\mathcal{R})$ 을 사용하는 것은 매우 타당함을 확인할 수 있다.

Fig. 7은 Fig. 6에서 보인  $L = 0$  바닥상태에 대한 전자쌍과 QE쌍의 쌍 진폭함수 (pair amplitude function)  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 를 상대 각운동량의 함수로 나타낸 것이다. 전자들은 슈도퍼텐셜이 초조화적이며  $\mathcal{R} = 1$ 인 상태를 기피하는 Laughlin 형 상관작용을 나타내는 반면 QE들은  $\mathcal{R} = 1$ 이 아니라  $\mathcal{R} = 3$ 과  $\mathcal{R} = 7$ 인 상태를 기피하므로 QE들의 쌍 상호작용 (pair interaction)은 초조화적이지 않다.

### X. 각운동량에 대한 유용한 정리

각운동량이  $l$ 인 스핀편극된 페르미 입자  $N$ 개로 이루어진 계는 이미 언급한 바와 같이 총 각운동량  $\hat{L} = \sum_i \hat{l}_i$ 과 이의  $z$ -성분  $M = \sum_i m_i$ 의 고유함수를 써서 기

술할 수 있다. 각운동량이  $l$ 인 페르미 입자  $N$ 개가 총 각운동량 값  $L$ 을 가질 수 있는 다중도 (number of multiplets)를  $f_L(N, l)$ 로 나타내자. 이들 다중 성분 상태는  $M$ 이  $-L \leq M \leq L$ 인  $(2L + 1)$ 개 상태로 구성된다. 이들 다중상태를  $|l^N; L\alpha\rangle$ 로 구분한다. 여기서  $\alpha$ 는 같은  $L$  값을 가지는 구분되는 상태를 나타내는 인수이다.

이제 성분 입자 각운동량이  $l$ 인 임의의 한쌍  $i, j$ 의 각운동량을  $\hat{L}_{ij} = \hat{l}_i + \hat{l}_j$ 와 같이 나타내자. 이들 계의 에너지 스펙트럼과 상호작용의 특성을 기술하는 데 다음과 같은 정리가 매우 유용하다.

#### 정리 1

$$\hat{L}^2 + N(N - 2)l^2 = \sum_{\langle i, j \rangle} \hat{L}_{ij}^2 \quad (29)$$

이 표현에서  $\langle i, j \rangle$ 는 입자쌍  $i$ 와  $j$ 를 의미하며, 우변의 합은 가능한 모든 입자쌍에 대한 합이다. 이 정리는  $\hat{L}^2$ 과  $\sum_{\langle i, j \rangle} \hat{L}_{ij}^2$ 의 정의식에서  $\hat{l}_i \cdot \hat{l}_j$ 을 소거함으로써 간단히 증명할 수 있다.

#### 정리 2

$l^* = l - (N - 1)$ 과  $2l \geq N - 1$ 인 경우에 있어서 페르미 입자들의 다중도에 대한 다음의 관계가 성립한다.

$$f_L(N, l) \geq f_L(N, l^*) \quad (30)$$

#### 정리 3

각운동량이  $l_B = l_F - \frac{1}{2}(N - 1)$ 인 보제 입자 상태의 다중도  $b_L(N, l_B)$ 와 페르미 입자 상태의 다중도  $f_L(N, l_F)$  사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$b_L(N, l_B) = f_L(N, l_F) \quad (31)$$

정리 2와 정리 3은 물리적으로 자명해 보이며 이에 대한 수학적 엄밀한 증명도 가능하다 [41,42].

## XI. 분수 헬통 계수

각운동량이  $l$ 인 페르미 입자 3개를 생각하자. 먼저  $l_1$ 과  $l_2$ 의 합  $L_{12}$ 를 구한 다음,  $L_{12}$ 에  $l_3$ 을 합하면 총 각운동량  $L$ 을 얻는다. 일반적으로  $L_{12}$ 는  $0 \leq L_{12} \leq 2l - 1$ 이며  $|L - l| \leq L_{12} \leq L + l$ 이므로  $|l^3; L\alpha\rangle$ 는 가능한 모든  $|l^2(L_{12}); l; L\rangle$ 의 일차결합으로 표현된다. 이 과정을 다음과 같이 나타낸다.

$$|l^3; L\alpha\rangle = \sum_{L_{12}; \text{even}} G_{L\alpha}(L_{12}) |l^2(L_{12}); l; L\rangle \quad (32)$$

페르미 입자인 경우에  $L_{12}$ 는 짝수 값을 가진다. 상태  $|l^2(L_{12}); l; L\rangle$ 은 2개 입자 (1,2)의 파동함수와 입자 3의 파동함수의 곱으로 이루어진 총 각운동량이  $L$ 인 상태이다. 이때 곱해지는 두 파동함수는 각각 구분되는 확정된 각운동량을 가지며, 총 각운동량이  $L$ 인 곱함수 상태를 얻는 과정에서는 입자 (1,2)가 입자 3과 동등한 입자라는 사실을 고려하지 않는다. 예를 들자면, 입자 1과 입자 3을 같은 상태, 다시 말하면 같은  $l_z$  값을 가지는 상태에 허용하는 경우이다. 그러나 상태  $|l^2(L_{12}); l; L\rangle$ 는 입자 1,2의 교환 ( $P_{12}$ )에 대해서는 다음과 같다.

$$|l^2_{12}(L_{12}); l; L\rangle = -(-1)^{L_{12}}|l^2_{21}(L_{12}); l; L\rangle.$$

위의 표현에서  $l^2_{12}(L_{12})$ 는 각각  $l$  껍질에 있는 입자 1과 2에 대하여  $l_1 = l$ 이  $l_2 = l$ 과 결합해서  $L_{12}$ 를 이루는 경우를 나타낸다 [43]. 상태  $|l^2(L_{12}); l; L\rangle$ 에서는 입자 1과 2를 입자 3과 다르게 취급하기 때문에  $|l^2(L_{12}); l; L\rangle$ 는 대칭성이 낮으며 교환  $P_{13}, P_{23}$ 에 대하여 부호가 바뀌지 않는다. 각운동량이  $l_3 = l$ 인 제3의 입자를 더함으로써 총 각운동량  $L$ 을 얻게 된다. 동등입자 3개로 이루어진 상태인  $|l^3; L\alpha\rangle$ 는 임의의 두 입자의 교환에 대하여 반대칭적이어야 하며 이러한 조건은 결합계수  $G_{L\alpha}(L_{12})$ 를 적절하게 선택함으로써 가능하다. 여기서  $\alpha$ 는  $L$ 이 같은 여러 개의 반대칭  $l^3$  배위를 구분하기 위한 부가적인 양자수이다. 결합계수  $G_{L\alpha}(L_{12})$ 를 분수 혈통 계수 (coefficients of fractional parentage; cfp)라 부른다 [43]. 분수 혈통 계수 개념은 핵물리학 분야에서 핵의 껍질모형을 이해하는 데 널리 쓰이는 편리하게 개념이다 [43]. 응집물리 연구자들에게는 익숙하지 않은 이 개념이 분수 양자 홀 상태의 상관작용을 이해하는 데 매우 유용함을 알 수 있다 [3,24]. 식 (32)에서 상태  $|l^2(L_{12}); l; L\rangle$ 은 반대칭 상태  $|l^3; L\alpha\rangle$ 의 부분 어미 (fractional parent) 상태이다. 일반적으로  $G_{L\alpha}(L_{12})$ 는 다음과 같은 규격화 조건을 만족한다.

$$\sum_{L_{12}} (G_{L\alpha}(L_{12}))^2 = 1 \quad (33)$$

계수 cfp는 Racah 계수 (Racah coefficients)와 관련이 있다 [44].

이러한 3-페르미 입자 문제를 다음과 같이 일반화시킬 수 있다.

$$|l^N; L\alpha\rangle = \sum_{L'\alpha'} \sum_{L_{12}} G_{L\alpha, L'\alpha'}(L_{12}) |l^2(L_{12}); l^{N-2}, L'\alpha'; L\rangle \quad (34)$$

위의 표현에서  $|l^{N-2}, L'\alpha'\rangle$ 는 개별 각운동량이  $l$ 인 ( $N-2$ ) 페르미 입자들의 총 각운동량이  $L'$ 인  $\alpha'$  다중도 상

태를 나타낸다. 식 (34)는  $|l^{N-2}, L'\alpha'\rangle$ 와  $|l^2(L_{12})\rangle$ 을 써서 총 각운동량이  $L$ 인  $N$ -입자계의 반대칭성 고유벡터  $|l^N; L\alpha\rangle$ 를 결정하는 과정을 보이고 있다. 이때의 결합계수  $G_{L\alpha, L'\alpha'}(L_{12})$ 를 분수 대혈통 계수 (coefficient of fractional grandparentage; cfg)라 부르며 [43], 상태  $|l^2(L_{12}); l^{N-2}, L'\alpha'; L\rangle$ 은  $|l^N; L\alpha\rangle$ 의 큰 어미 (grandparent) 상태이다. 고유함수  $|l^N; L\alpha\rangle$ 에 대한 직교규격화 조건을 쓰면 cfg에 대한 다음과 같은 유용한 합규칙을 얻는다.

$$\sum_{L_{12}} \sum_{L'\alpha'} G_{L\alpha, L'\alpha'}(L_{12}) G_{L\beta, L'\alpha'}(L_{12}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (35)$$

쌍 각운동량에 대한 정리 1, 식 (29)와 식 (34)로부터 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$L(L+1) + N(N-2)l(l+1) = \langle l^N; L\alpha | \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{L}_{ij}^2 |l^N; L\alpha\rangle \quad (36)$$

식 (34)는 반대칭 고유함수  $|l^N; L\alpha\rangle$ 를 쌍 각운동량  $\hat{L}_{ij}$  상태의 일차결합으로 표현하고 있으므로 식 (36)의 우변은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2} N(N-1) \sum_{\alpha} G_{L\alpha}(L_{12}) L_{12}(L_{12}+1) \quad (37)$$

이 표현에서  $G_{L\alpha}(L_{12}) = \sum_{L'\alpha'} |G_{L\alpha, L'\alpha'}(L_{12})|^2$ 이며  $G_{L\alpha}(L_{12})$ 는 상태  $|l^N; L\alpha\rangle$ 에 속하는 쌍 각운동량이  $L_{12}$ 인 입자쌍 상태의 진폭함수의 척도이다. 식 (36)의 좌변이 다중도 양자수  $\alpha$ 에 무관하므로  $\hat{L}_{ij}^2$ 의 상태  $|l^N; L\alpha\rangle$ 에 대한 기대값은 총 각운동량  $L$ 에만 의존함을 알 수 있다. 식 (35)-(37)을 결합하면 입자쌍 상태 진폭함수의 척도  $G_{L\alpha}(L_{12})$ 와 관련된 다음과 같은 두 가지 유용한 합규칙을 얻는다 [35].

$$\sum_{L_{12}} G_{L\alpha}(L_{12}) = 1 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} N(N-1) \sum_{L_{12}} L_{12}(L_{12}+1) G_{L\alpha}(L_{12}) \\ & = L(L+1) + N(N-2)l(l+1) \end{aligned} \quad (39)$$

다중상태  $|l^N; L\alpha\rangle$ 의 에너지를 상호작용하는 입자들의 슈도퍼텐셜  $V(L_{12})$ 를 써서 나타내면 다음과 같다.

$$E_{\alpha}(L) = \frac{1}{2} N(N-1) \sum_{L_{12}} G_{L\alpha}(L_{12}) V(L_{12}) \quad (40)$$

식 (40)과  $G_{L\alpha}(L_{12})$ 에 대한 합규칙인 식 (38)과 (39)를 결합하면 “조화 슈도퍼텐셜  $V_H(L_{12})$  로 상호작용하는

계의 에너지  $E_\alpha(L)$ 는 전혀  $\alpha$ 와는 무관하다”는 사실을 확인할 수 있다. 다시 말하면, 총 각운동량  $L$ 이 같은 고유상태들은 모두 에너지가 같다. 그러므로,  $V_H = A + BL_{12}(L_{12} + 1)$ 로 표현되는 조화 슈도퍼텐셜에는 상관효과가 반영되지 않으며, 총 각운동량이  $L$ 인 고유상태들의 일차결합은 조화퍼텐셜의 고유상태이기도 하다. 그러므로, 입자들 사이의 상관작용은 비조화 슈도퍼텐셜 (nonharmonic pseudopotential)을 쓰는 경우에만 효과를 드러낸다.

### XII. 다체 상관작용과 비조화 슈도퍼텐셜

조화 슈도퍼텐셜은 상관효과를 나타내지 않으므로 총 각운동량  $L$ 이 같은 다중상태들의 에너지는 모두 같다. 슈도퍼텐셜이  $V_H = A + BL_{12}(L_{12} + 1)$ 인 경우에는 에너지가  $\alpha$ 에 의존하지 않고 각운동량  $L$ 에만 의존하며, 식 (38)과 (39)를 결합하면 식 (40)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$E_\alpha(L) = N \left[ \frac{1}{2}(N-1)A + B(N-2)l(l+1) \right] + BL(L+1) \quad (41)$$

입자쌍 상호작용 중에  $\Delta V(\mathcal{R}) = V(\mathcal{R}) - V_H(\mathcal{R})$ 로 표현되는 비조화 부분만이 상관작용을 결정하며 각운동량이  $L$ 인 다중상태들의 축퇴를 제거한다.  $\Delta V = \Delta_1 \delta_{\mathcal{R},1}$  (단,  $\Delta_1 > 0$ )이어서  $\mathcal{R} = 1$ 인 곳을 제외한 곳에서  $\Delta V$ 가 0이면  $\Delta V(\mathcal{R} = 1)$ 가 상관작용을 결정하는 유일한 에너지 척도가 된다.  $\Delta V(\mathcal{R} = 1) > 0$ 이면 주어진 총 각운동량  $L$ 에서 가장 낮은 에너지 상태는  $\mathcal{G}_{L\alpha}(\mathcal{R} = 1)$ 가 최소값  $\mathcal{G}_{L0}(\mathcal{R} = 1)$ 이 되며,  $\mathcal{R} = 1$ 인 입자쌍 상태를 최대한으로 기피하게 된다. Laughlin 상관작용 (Laughlin correlations)은 바로 이와 같이  $\mathcal{R} = 1$ 인 입자쌍 상태를 최대한으로 기피하고자 하는 입자들 간의 상관작용이다.  $\Delta V(\mathcal{R} = 1)$ 가 매우 크면  $2Q \geq 3(N-1)$ 일 때의  $L = 0$ 인 바닥상태에서는 입자쌍의 상대 각운동량 값이  $\mathcal{R} = 1$ 일 상태의 진폭함수  $\mathcal{G}_{L0}(\mathcal{R} = 1)$ 은 매우 작다 (Fig. 7 참조).  $\mathcal{R} = 1$ 인 입자쌍 상태를 완벽하게 기피하는 경우가 바로  $\nu = 1/3$  상태의 Laughlin 파동함수에 나타나 는 Laughlin-Jastrow 인자  $\prod_{\langle i,j \rangle} (z_i - z_j)^2$ 가 가지는 의미이다 [14]. 여기서 상대 각운동량이  $\mathcal{R} = 1$ 인 상태를 기피한다는 것은 평면 구조에서  $m = 1$ 인 입자쌍 상태를 기피하는 것과 대등하다.

페르미 입자 유효 각운동량  $l_p^* = l - p(N-1)$ 을 도입하고 식 (30)에 보인 정리 2를 써서 총 각운동량이  $L$ 인

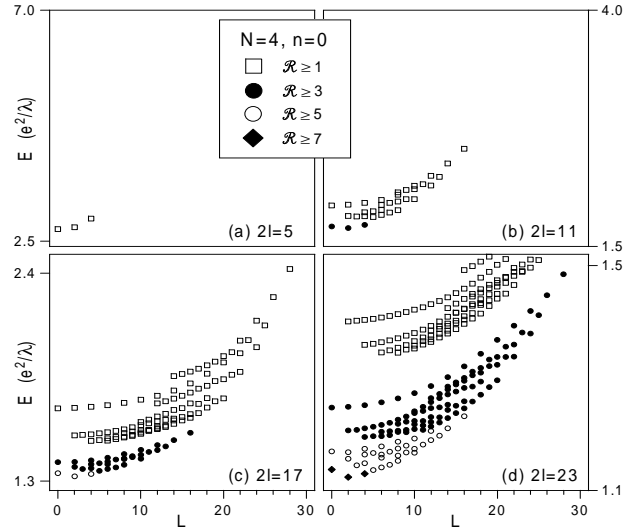


Fig. 8. The energy spectra of 4 electrons in the lowest Landau level at different monopole strengths of (a)  $2Q = 5$ ; (b)  $2Q = 11$ ; (c)  $2Q = 17$ ; and (d)  $2Q = 23$ . All those values of  $2Q$  are equivalent to  $2Q^* = 5$  in the mean field CF picture (CS transformation with  $p = 0, 1, 2,$  and  $3$  respectively).

다중상태의 갯수  $f_L(N, l)$ 의 부분조합을 골라냄으로써  $\mathcal{R} < 2p$  ( $p$ 는 정수)인 입자쌍 상태를 기피할 수 있다.  $n$ 이  $n = (2p+1)$ 로 표현되는 홀수인 경우에  $2l = n(N-1)$ 인 상태에 대해서는  $2l_p^* + 1 = N$ 이므로  $l_p^*$ 는  $L = 0$ 인 한개 상태만 찾아낸다. 그러므로 Laughlin 바닥상태는  $\mathcal{R} < 2p$ 인 모든 입자쌍 상태들을 최대한 기피한다. 슈도퍼텐셜  $V(\mathcal{R})$ 이, Fig. 5에 예시한 바와 같이,  $V(1) \gg V(3) \gg \dots \gg V(2p+1)$ 인 경우에는 Fig. 8에 예시한 바와 같이 에너지 스펙트럼은 몇 개의 띠로 나누어진다.

Fig. 8은  $N = 4$ 인 계에 대하여 바닥 LL( $n = 0$ )의 에너지 스펙트럼을  $2l = 5, 11, 17, 23$ 에 대하여 나타낸 것이다. 각운동량이  $l = 23/2$ 인 껍질에 있는 페르미 입자들에게 허용되는 입자쌍의 각운동량  $L_{12}$ 는, 홀수  $j$ 에 대하여,  $L_{12} = 2l - j = 22, 20, 18, \dots, 4, 2, 0$ 이다. 그러므로 이에 대응하는 상대 각운동량  $\mathcal{R} (= 2l - L_{12})$ 은  $\mathcal{R} = 1, 3, 5, \dots, 19, 21, 23$ 이다. CF 변환을 하면, 정수  $p$ 에 대하여, 유효 각운동량은  $l_p^* = l - p(N-1)$ 이며, 이들 유효 각운동량 상태들은 각운동량이  $l$ 인  $N$ 개 입자들의 상태 다중도 집합에서 추려낸 부분집합 상태들이다. 이 부분집합 상태들은 CF 변환 이전 단계의 슈도퍼텐셜에서 입자쌍 척력이 가장 센 상태를 완벽하게 기피하게 된다. Fig. 8에 보인 4가지 경우는 각각  $p = 0, 1, 2, 3$ 인 CF 변환이며 CF 평균장 근사에서 유효 각운동량  $l^*$ 가 모두 같다. 예를 들면,  $2l = 5$ 인 Fig. 8(a)를 보면  $2l_1^* = 5 - 2 \cdot 0(4-1) = 5$ 이며 상대 각운동량이  $\mathcal{R} \leq 1$ 인 2개

의 QH 상태가  $L = 0, 2, 4$ 에 나타난다.  $2l = 11$ 인 Fig. 8(b)를 보면  $2l_1^* = 11 - 2 \cdot 1(4 - 1) = 5$ 이며  $\mathcal{R} \leq 3$ 과  $\mathcal{R} \leq 1$ 인 상태로 이루어지는 2개의 띠가 형성된다. 가장 낮은 띠는 상대 각운동량이  $\mathcal{R} \leq 1$ 인 상태를 기피한다. 그러나 높은 상태들로 이루어진 띠는 어떤 값의 상대 각운동량 상태도 기피하지 않는다. 특정한  $L$ 값에서의 이들 두 띠간격은  $V(\mathcal{R} = 1)$ 에 의해 결정된다.  $2l = 17$ 인 Fig. 8(c)를 보면  $2l_1^* = 17 - 2 \cdot 2(4 - 1) = 5$ 이며, 에너지가 낮은 상태들로 이루어진 낮은 2개의 띠는 각각  $\mathcal{R} \leq 3$ 과  $\mathcal{R} \leq 1$ 인 상태들을 각각 기피한다.  $2l = 23$ 인 경우도  $2l_1^* = 23 - 2 \cdot 3(4 - 1) = 5$ 이며, 스펙트럼이 4개의 에너지 띠로 이루어진다. 그림에서 속이 채워진 마름모는  $\mathcal{R} \geq 7$ 인 상태, 즉  $\mathcal{G}(1) \approx \mathcal{G}(3) \approx \mathcal{G}(5) \approx 0$ 이면서  $\mathcal{G}(7) > 0$ 인 경우, 속이 빈 원은  $\mathcal{R} \geq 5$ 인 상태, 즉  $\mathcal{G}(1) \approx \mathcal{G}(3) \approx 0$ 이면서  $\mathcal{G}(5) > 0$ 인 경우, 속이 채워진 원은  $\mathcal{R} \gg 3$ 인 상태, 즉  $\mathcal{G}(1) \approx 0$ 이고  $\mathcal{G}(3) > 0$ 인 경우, 속이 빈 정사각형은  $\mathcal{R} \geq 1$ 인 상태, 즉  $\mathcal{G}(1) > 0$ 인 경우이다. 특정한  $L$  값에서의 에너지 띠 간격은 i) 가장 높은 두 개의 띠 사이에는  $V(\mathcal{R} = 1)$ , ii) 둘째와 셋째 높은 에너지 띠 간격은  $V(\mathcal{R} = 3)$ , iii) 가장 낮은 두 에너지 띠 간격은  $V(\mathcal{R} = 5)$ 에 의존한다. Fig. 8은 서로 다른 에너지 띠들의 전반적인  $L(L+1)$  의존성을 분명하게 드러내 보인다. 가장 낮은 LL의 Hilbert 공간은 각각 상대 각운동량이  $\mathcal{R} < 1, \mathcal{R} < 3, \mathcal{R} < 5, \mathcal{R} < 7$  등과 같은 입자쌍 상태를 기피하는 부분공간들로 나누는 것을 확인할 수 있다. 이러한 상관효과는 Laughlin이 제안한 상관작용의 특징이다.

### XIII. 들뜬 란다우 준위 입자들의 상관작용

첫째 들뜬 LL( $n = 1$ )에 있는 전자들에 대한 슈도페텐셜은  $\Delta V(\mathcal{R} = 1) \leq 0$ 인 특성을 나타낸다 (Fig. 4(b)와 5(b) 참조). Laughlin 상관작용 상태의 진폭  $\Delta \mathcal{G}(\mathcal{R} = 3)$ 의 일부가 진폭이  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 1)$ 인 상태와  $\mathcal{R} \geq 5$ 인 상태로 옮겨간 경우와 비교함으로써 상대 각운동량이  $\mathcal{R} = 1$ 인 입자쌍 상태를 기피하는 Laughlin 상관작용을 나타내는 상태의 에너지가 더 높음을 어렵지 않게 확인할 수 있다. 이러한 진폭함수의 이동은 두개의 합규칙, 즉 식 (38)과 (39) 및 에너지  $E_\alpha(L)$ 의  $\Delta V(\mathcal{R})$  의존성에 기인한다.  $\Delta V(\mathcal{R} = 1) \leq 0$ 인 경우에는 개개의 전자들이 Laughlin 상관상태를 이루기보다는 전자들이 짝을 지어 [45] 상대 각운동량이  $\mathcal{R} = 1$ 인 전자 쌍을 이루려는 경향이 관찰된다 [37]. 페르미 입자들이 이루는 쌍들은 보제 입자나

페르미 입자 어느 것으로도 취급할 수 있다. 그 까닭은 2차원 계에서는 CS 변환을 통해서 보제 입자 통계와 페르미 입자 통계 서로간에 변환이 가능하기 때문이다. 다만, 입자쌍들이 여러 개 존재하는 경우에는 서로 다른 입자쌍에 속하는 동등입자들이 파울리 배타원리를 위배하지 않도록 입자쌍-입자쌍 사이의 간격이 충분히 커야 한다. 이러한 제약을 따르도록 하고자 입자쌍을 (새로운) 페르미 입자 (Fermion pair; FP)로 취급하자. 2개의 입자쌍에게 허용되는 총 각운동량 값  $L' (= 2l_{FP})$ 을 다음과 같은 새로운 CS 변환을 통해서 정의할 수 있다.

$$2l_{FP} = 2(2l_1 - 1) - \gamma_F(N_P - 1) \quad (42)$$

위의 표현에서  $l_1$ 은  $n = 1$  LL의 각운동량이고,  $\gamma_F$ 는 홀수이며  $N_P = N/2$ 는 입자쌍의 갯수이다. 식 (42)는  $\gamma_F (= 3)$ 개의 선속 양자  $\phi_0$ 를 각운동량이  $(2l_1 - 1)$ 인 보제 입자쌍에 부착시키는 CS 변환을 나타내고 있다. 전자 채움인수  $\nu_1 = N(2l_1 + 1)^{-1}$ 가 1일 때 FP 채움인수  $\nu_{FP} = N_P(2l_{FP} + 1)^{-1}$ 도 1이 되도록 놓음으로써  $\gamma_F$ 의 값을 확정한다. 만약 입자쌍을 (새로운) 보제 입자 (Boson pair; BP)로 보는 경우는  $\gamma_F$ 를  $\gamma_B = \gamma_F - 1$ 로 대체하면 된다. 그러므로  $l_{FP} [= 2l_1 - 1 - \frac{3}{2}(N_P - 1)]$ 는 FP 한개의 유효 각운동량이며,  $N^{-1}$ 을 무시할 수 있는 거시 계에 대한 FP 채움인수  $\nu_{FP}$ 와  $n = 1$  LL의 전자 채움인수  $\nu_1$ 사이의 관계는 다음과 같아진다.

$$\nu_{FP}^{-1} = 4\nu_1^{-1} - 3 \quad (43)$$

첫째 들뜬 LL의 전자 채움인수  $\nu_1$ 이  $2/3 \geq \nu_1 \geq 1/3$ 인 구간 (이 구간에서는 슈도페텐셜이 초조화적이며  $\mathcal{R} = 1$ 인 경우를 기피하는 Laughlin-Jain 상태 [11,12,27]가 정상적으로 나타나는 영역임)에 놓인 경우에도 입자쌍 형성이 예상된다. 모든 전자들이 FP를 형성하고 서로 다른 FP들 간에 Laughlin 상관작용이 존재하면 FP 채움인수  $\nu_{FP} = 1/3, 1/5, 1/7$  및  $1/9$ 이 예상된다. 식 (43)에 이들 채움인수를 적용하면  $\nu_1 = 2/3, 1/2, 2/5$  및  $1/3$ 을 얻는다. 전자-홀 대칭성 때문에 전자채움  $\nu_1 = 2/3$ 는 홀 (hole)채움  $1/3$ 에 해당하며, 이는 홀쌍 (pair of Fermion holes) 채움인수  $\nu_{FP} = 1/9$ 에 대응된다. 그러므로, FP 채움인수는 작아져서  $1/9 \leq \nu_{FP} \leq 1/5$ 에 속하며 이들 상태에서는 입자쌍들간 간격이 입자쌍의 크기보다 크고 입자쌍들간 슈도페텐셜은 꼴롱 작용과 같은 초조화 형태이다.

입자쌍 형성에 대한 이러한 모형은 슈도페텐셜을 써서 수치 대각화 연산을 수행함으로써 시험해 볼 수 있다 [37]. 이곳에서는 꼴롱 척력 슈도페텐셜의 짧은 거리 비

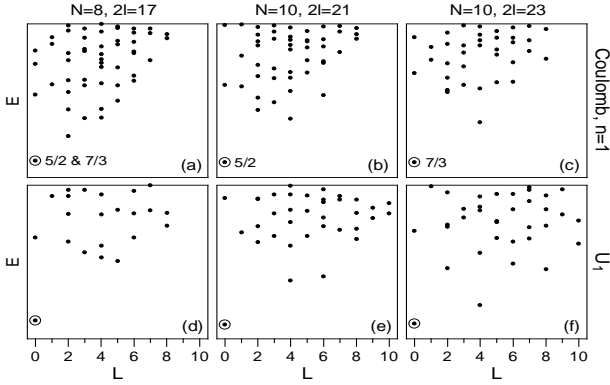


Fig. 9. The  $N$ -electron energy spectra calculated on a Haldane sphere with different values of  $2l$  for Coulomb interaction in the  $n = 1$  Landau level [(a)-(c)] and for model pseudopotential  $U_1$  [(d)-(f)].

조화 특성을 이해하기 위해서 다음과 같은 모델 슈도퍼텐셜  $U_x(\mathcal{R})$ 를 생각하자. (단,  $0 \leq x \leq 1$ ) [37]

$$U_x(\mathcal{R} \geq 5) = 0, U_x(\mathcal{R} = 1) = 1, U_x(\mathcal{R} = 3) = xV_H(3)$$

여기서  $V_H(3)$ 는  $\mathcal{R} = 3$ 일 때의 조화퍼텐셜 값이며 상대 각운동량 값이  $\mathcal{R} = 1$ 과  $\mathcal{R} = 5$  사이에서  $U_{x=1}$ 이  $L(L+1)$ 에 선형적이 되도록 잡는다.  $x$ 가 각각  $x = 0, 0 < x < 1, 1 < x$ 인 값을 가짐에 따라  $U_x(\mathcal{R})$ 는 상대 각운동량이 작은 영역에서 각각 초조화, 조화, 버금조화 형이다 [3].  $x = 0$ 인 경우에는 Laughlin 상관작용을 바르게 나타내며  $x \gg 1$ 일 때는 입자쌍을 만들거나 더 큰 클러스터 형성을 바르게 기술할 수 있다.  $U_0$ 은  $\mathcal{R} = 1$ 에서 LLL 상태들의 슈도퍼텐셜처럼 초조화적이고,  $U_1$ 은  $n = 1$  LL의 특징을 유사하게 나타낸다.  $U_{x>2}$ 는 매우 강한 버금조화 형이다. 그러므로,  $U_x$ 는  $V_H(\mathcal{R})$ 에 더해지는 비조화항이다. 위의 모델 슈도퍼텐셜에서 생략된 조화항은 다체 파동함수에 주는 효과가 없고 다만 에너지 스펙트럼 전체를 식 (41)에 보인 바와 같이  $L(L+1)$ 에 비례하는 상수값 만큼 평행이동시킨다.

Fig. 9는  $(N; 2l)$ 이 각각  $(8; 17), (10; 21), (10; 23)$ 인 경우에 대한 에너지 스펙트럼이다. Fig. 9(a), (b), (c)는 각각 첫째 들뜬 LL( $n = 1$ )에 있는 전자들 간 끌림 상호작용에 대한 결과이고 Fig. 9(d), (e), (f)는 모델 슈도퍼텐셜  $U_1$ 을 썼을 때에 대한 결과이다.  $U_1$ 에 대한 슈도퍼텐셜의 조화 항의 기여는 포함하지 않은 결과이다. 그림에 보인 각각의  $L = 0$  바닥상태는  $n = 1$  LL의 전자 채움인수  $\nu_1$ 이 (a)  $1/2$  또는  $1/3$ , (b)  $1/2$ , (c)  $1/3$ , (d)  $1/2$  또는  $1/3$ , (e)  $1/2$ , (f)  $1/3$ 인 상태에 해당한다. 바닥 LL( $n = 0$ )을 가득 채우고 있는 스핀편극되지 않은 전자들을 고려한 전체 채움인수는 이들 채움인수에 2를 더

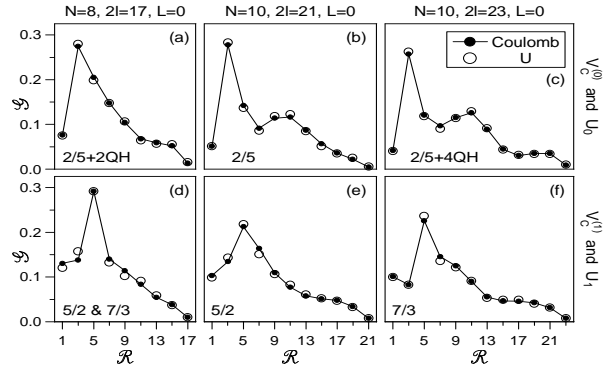


Fig. 10. Pair amplitude profiles for the lowest-energy  $N$ -electron states at  $L = 0$ , calculated on a Haldane sphere with different values of  $2l$  in the  $n = 0$  Landau level (a-c) and in the  $n = 1$  Landau level (d-f).

한 값이며 각각  $\nu = 5/2$  또는  $7/3$  [(a)와 (d)],  $5/2$  [(b)와 (e)],  $7/3$  [(c)와 (f)]이다. 그림에서 확인할 수 있는 바와 같이 실제 슈도퍼텐셜  $V_1$ 과 모델 슈도퍼텐셜  $U_1$ 은 공통된  $L = 0$  바닥상태를 잘 드러내 보인다. 그러나 들뜬 띠 구조는 큰 차이를 보인다.  $U_1$ 에 포함될 조화 항의 기여를 보려면  $L(L+1)$ 에 비례하는 항을 Fig. 9(d), (e), (f)의 결과에 더하면 된다.

Fig. 10은  $n = 0$  LL에 있는  $L = 0$  바닥상태의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 와 Fig. 9에 보인  $n = 1$  LL에 대한  $L = 0$  바닥상태의 입자쌍 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 를 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 의 함수로 나타낸 것이다.  $n = 0$  LL에서  $n = 1$  LL로 옮겨감에 따라  $\mathcal{G}(1)$ 은 증가하는 반면  $\mathcal{G}(3)$ 은 뚜렷하게 감소한다. 이러한 진폭함수의 이동은 전자들이 입자쌍을 이루며  $\mathcal{R} = 3$ 인 입자쌍 상태를 기피한다는 증거가 된다.

채움인수가  $\nu_{FP} = 1/5$ 과  $\nu_{FP} = 1/9$ 인 페르미 입자쌍 상태는 각각  $2l_{FP} = 5(N_P - 1)$ 과  $2l_{FP} = 9(N_P - 1)$ 에서 예상되므로  $2l_{FP}$ 에 대한 식 (42)와  $\gamma_F = 3$ 을 선택하면 적절한 전자 채움인수  $\nu_1$ 에 대하여  $2l_1$ 과  $N$  사이의 관계식을 얻을 수 있다 [37]. 예를 들자면,  $\nu_1 = 1/2$ 일 때는  $2l_1 = 2N - 3$ 이다. 이 경우에는 전자-홀 대칭성을 활용해서  $N$ 을  $2l_1 + 1 - N$ 으로 대체한 상보적인 상태가 존재한다.  $\nu_1 = 1/2$ 이면  $2l_1 = 2N + 1$ 을 얻고,  $\nu_1 = 1/3$ 일 때는  $2l_1 = 3N - 5$ 인 관계를 얻는다. 이들 값에서  $L = 0$  바닥상태와 들뜬에너지 간격도 얻을 수 있다.  $2l_1 = 3N - 7$ 에서는  $L = 0$  바닥상태와 좀더 큰 들뜬에너지 간격을 얻게 되며 Fig. 9와 10에서는 이 값을 써서  $\nu_1 = 1/3$  상태를 알아보았다. 계의 크기가 증가하면 유한 크기효과 (size effect)는 무시할 수 있다. 한편, 채움인수가  $\nu_1 = 1/3$  근처에 있는  $N$ 개 전자들로 이루어진 계를  $N_1$ 개의 짝없는 전자들과  $N_2 = \frac{1}{2}(N - N_1)$ 개 쌍으로 나누어 분석하는 작업도 가능하나, 이에 대한 체계적인 분석은 아직 이루어지지 않은 상태이다.

### XIV. Chern-Simons 게이지 이론 재조명

이미 VII절에서  $\alpha$ 개의 자기선속 양자  $\phi_0$ 을 전자에 부착하는 CS 게이지 모형을 소개하였으며 VIII절에서는 CS 자기장을 평균장 근사방법으로 포함시킨 CF 모형을 살펴보았다. 식 (21)과 식 (22)는 각각 CS 벡터퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r})$ 와 게이지 자기장  $\vec{b}(\vec{r})$ 에 대한 표현이다. CS 변환에 따른 새로운 하밀토니안은 식 (26)이다. 게이지 자기장을 평균장으로 취급함으로써 입자들이 받는 유효 자기장  $B^*$ 를 다음과 같이 쓸 수 있었다.

$$B^* = B + \alpha\phi_0 n_S \quad (44)$$

평균장 CS 근사 방법을 택하면, 외부 자기장  $B$ 가 정해진 경우에, 자기홀극의 세기  $2Q$ 와 전자 갯수  $N$ 에 의해 결정되는 최소한의 QE이나 QH의 각운동량을 단순히 합성함으로써, 낮은 에너지 스펙트럼의 구조를 바르게 예측할 수 있었다. 그러나, 평균장 CS 모형에서는 유효 싸이클로트론 진동수  $\omega_c^* = eB^*/mc$ 로 표시되는 새로운 에너지 척도가 도입되며, 특히 외부 정자기장  $B$ 가 큰 경우에는  $\hbar\omega_c^*$ 는 꼴롱 에너지를 크게 증가하므로 에너지 스펙트럼을 결정하는 데 전혀 부적절한 사례가 대두한다.

어느 한 전자는 다른 전자들에 의한  $\delta$ -함수 꼴로 표시되는 CS 자기장을 감지하지 못하므로 CS 자기장  $\vec{b}(\vec{r}) (= \nabla \times \vec{a}(\vec{r}))$ 이 고전 운동방정식에 주는 영향이 없음을 이미 알고 있다. Aharonov와 Bohm [46]에 의한 획기적인 연구 이후에, 파동함수의 크기는 변하지 않고 위상이 변하는 게이지 변환 방법을 써서,  $\vec{b}(\vec{r})$ 는 0이지만  $\vec{a}(\vec{r})$ 가 유한한 경우에 대한 양자역학적인 문제를 이해하고자 하는 노력이 보편화되어 있다 [47,48]. 전하와 질량이 각각  $-e$ 와  $m_e$ 인 입자가  $x-y$  평면에 놓인 원둘레 위에서만 움직이도록 갇혀 있는 경우를 생각하자. 원형 경로의 중심에 가늘고 긴 솔레노이드가  $z$ -축 방향으로 놓여 있다. 자기선속  $\Phi (= \alpha\phi_0)$ 가 발생하도록 솔레노이드에 전류가 흐를 때 전자의 고유함수  $\phi_m(\vec{r})$ 는 다음과 같다.

$$\phi_m(\vec{r}) = e^{-i(e/\hbar c) \int \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \Psi_m(\vec{r}). \quad (45)$$

위의 식에서  $\Psi_m(\vec{r}) = e^{im\phi} u_m(r)$ 는 식 (2)에 표현한  $n = 0$ 인 상태의 고유함수이다. 벡터퍼텐셜은  $\vec{a}(\vec{r}) = (\frac{\Phi}{2\pi r}) \hat{\phi}$ 이고 미소한 2차원 변위는  $d\vec{r} = (\hat{r}dr + \hat{\phi}rd\phi)$ 이므로 식 (45)의 위상은  $-i\alpha\phi$ 이다. 다만, 여기서  $\phi$ 는 원형 궤도 상에서 입자의 위치를 나타내는 각도이다. 그러므로 식 (45)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\phi_m(\vec{r}) = e^{i(m-\alpha)\phi} u_m(r). \quad (46)$$

$\vec{r}$ 이 두 페르미 입자의 상대위치  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 를 나타내는 경우에, 식 (46)은 2차원 계의 통계변환 (transmutation of statistics) 관계를 나타내고 있다 [20]. 입자 1과 2를 교환하는 일은 각도  $\phi$ 를  $\phi + \pi$ 로 바꾸는 것과 같으므로,  $\alpha$ 가 짝수일 때는 통계규칙의 변환이 일어나지 않는다. 반면,  $\alpha$ 가 홀수이면 페르미 입자는 보제 입자로, 보제 입자는 페르미 입자로 변환되며,  $\alpha$ 가 정수가 아닌 경우에는 입자들은 에니온 통계 (anyon statistics) 규칙을 따른다. 궤도함수  $u_m$ 을 둘러싸는 부가적인 CS 선속은 파동함수의 각도 부분에 나타나는 위상을 변화시키며, VII절에서 언급한 바와 같이 CS 자기장을 포함하는 전체 하밀토니안은, 1차적으로, 평균장을 써서 나타낸다. 평균장 근사가 정성적으로 낮은 에너지 스펙트럼 구조를 바르게 예측할 수 있었으며 이를 근거로 평균장 근사에 포함되지 않은 꼴롱 작용과 CS 게이지 작용의 상당 부분이 서로 상쇄될 것이라는 제안도 있었다 [27]. 그러나 이러한 제안은, 이들 두 상호작용의 에너지 척도의 자기장 의존성이 전혀 다르므로, 임의의 크기의 외부 자기장  $B$ 에 대하여 일반화 될 수 없다.

$n$ 이 홀수인 Laughlin의  $\nu = 1/n$  상태에 평균장 CS 모형을 적용하려면 외부 자기장  $B$ 를 유효자기장  $B^* = B/n$ 로 대체하면 된다. 이에 따라 유효 자기길이는  $l^* = n^{1/2}l_0$ 이며 식 (9)로 표현한 파동함수에는  $l_0$  대신에  $l^*$ 가 나타난다. 준고전적인 (semiclassical) 입자 궤도는 반지름이 다음과 같이 변한다.

$$r_m^* = n^{1/2}r_m = (2n|m|)^{1/2}l_0$$

양자수가  $|m| = 1$ 인 상태에 있는 전자인 경우에 전자마다 선속 양자 2개를  $B$ 의 반대 방향으로 부착하면 유효 자기장은  $B^* = B/3$ 이고  $|m| = 1$ 인 CF 궤도는  $|m| = n$ 인 전자 궤도에 대응된다. 그러나, 이제 식 (3)의  $\omega_c$ 는  $\omega_c^*$ 로 대체되어야 하므로 유효 싸이클로트론 진동수는  $\nu = 1/n$ 배 만큼 감소한다. CF LL은 축퇴도가 낮아지므로 에너지 척도가  $\omega_c^*$ 인 들뜬 CF 상태를 염두에 두어야 한다. 이제  $e^2/l_0 \ll \hbar\omega_c$ 인 경우를 생각한다면, 올바른 대체 섭동 이론은 전자들의 가장 낮은 LL 상태에 속하는 다중도를 가지는 거의 축퇴된 에너지띠를 제시할 수 있어야 할 것이다. 이 에너지띠와 높은 에너지띠들 사이에는 거대한 띠허격을 사이에 두고 있어야 한다. 섭동전개에 필요한 작은 인수가 존재하지 않는 상황에서 대체 이론을 써서 이런 경우를 바르게 설명하는 것은 매우 난해한 일이다.

게이지 변환 방법이  $\nabla \times \vec{a}(\vec{r}) = 0$ 인 벡터퍼텐셜  $\vec{a}(\vec{r})$ 를 계에 부여하는 방법으로 유일한 방법만은 아니다. 어느

초기 상태에 있는 계에 CS 자기선속을 서서히 가하는 단열적인 방법 (adiabatic method)을 생각하자. CS 자기선속 값이 0에서 출발해서 선속 양자  $\phi_0$ 의 짝수 배 ( $\alpha\phi_0$ )가 되도록 천천히 증가시켜 보자 [49]. 위치  $\vec{r}_1$ 에 놓인 전자의 단일 입자 하밀토니안이 다음과 같이  $H_1$ 로 표현되고 각각의 위치가  $\vec{r}_1$ 과  $\vec{r}_2$ 인 2개의 전자로 이루어진 경우를 생각하자.

$$H_1 = (2\mu)^{-1} \left\{ \vec{p}_1 + \frac{e}{c} [\vec{A}(\vec{r}_1) + \vec{a}(\vec{r}_1)] \right\}^2$$

위의 식에서  $\vec{a}(\vec{r}_1) = \frac{\alpha\phi_0}{2\pi r} \hat{\phi} = -\vec{a}(\vec{r}_2)$ 이며  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ 이다.  $\hat{\phi}$ 는 상대좌표  $\phi$ 가 증가하는 방향을 향하는 단위벡터이다. 위의 하밀토니안을 질량중심 (CM)과 상대 (R) 운동 부분으로 분리하면 상대운동 부분  $H_R$ 은 다음과 같다.

$$H_R = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{q\tilde{B}}{2\mu c} l_z + \frac{q^2\tilde{B}^2}{8\mu c^2} r^2 \quad (47)$$

식 (47)에서  $\tilde{B} = B + (2\alpha\phi_0/\pi r^2)$ 이다.  $H_R$ 은 외부 자기장만 걸리고 CS 선속이 없는 경우에 대한 하밀토니안에 단지 외부 자기장  $B$ 를 연산자  $\tilde{B}$ 로 대체시킨 경우와 동일하다. 고유함수는 여전히  $\phi_m(r) = e^{im\phi} w_m(r)$ 인 형태이다. 다만  $w_m(r)$ 은  $\alpha \neq 0$ 인 경우에 식 (47)에 추가되는  $r$ -의존항을 보정한 새로 얻은 지름방향 함수이다. 식 (47)의  $B$ 에 비례하는 항은 다음과 같은 항을 추가시킨다.

$$\frac{\hbar q m}{2\mu c} \left( \frac{2\alpha\phi_0}{\pi r^2} \right)$$

이 항은 첫항 ( $-\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu r^2}$ )과 묶을 수 있다. 식 (47)의  $B^2 r^2$ 에 비례하는 항은  $(q^2/2\mu c^2)(\alpha\phi_0/\pi r)^2$ 과  $(q^2/2\mu c^2)\alpha\phi_0 B$ 를 추가한다. 이 중에 전자는 식 (47)의 첫항 ( $-\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu r^2}$ )과 묶고 후자는 에너지  $E$ 에 더할 수 있다. 그러므로 식 (47)에서  $B$ 를  $\tilde{B} = B + (2\Phi/\pi r^2)$ 로 대체하는 결과는  $m$ 을  $\tilde{m} = m + \alpha$ 로 대체하는 결과와 정확히 일치한다. 이러한 결과는,  $\alpha \neq 0$ 일 때, 궤도가 CS 선속 때문에 단순히  $u_m(r) \rightarrow u_{m+\alpha}(r)$ 로 바뀔을 의미한다. 이런 결과와는 달리, CS 선속을 도입하는 데 쓰인 게이지 변환방법에서는 본래의 전자궤도의 지름방향 함수  $u_m(r)$ 에 곱해지는 위상인자를 식 (45)에 추가한다. 지름방향 궤도함수는 게이지 변환 방법에서는 불변이지만, CS 선속이 단열적으로 보태지는 경우에는 변한다. 게이지 변환을 하면 파동함수의 각운동 성분은 Aharonov-Bohm 위상인자에 따라서 변하지만 CS 선속을 단열적으로 추가할 때는 불변이다 [49]. 이러한 사실은 CS 선속을 단열적으로 추가하는 경우에는 통계규칙이 바뀌지 않음을 의미한다. 그

까닭을 다음과 같이 생각해 볼 수 있다. 궤도를 통과하는 자기선속의 시간에 따른 변화율은 Faraday의 전자기 유도 규칙에 따라 궤도에 전기장을 불러 일으킬 뿐만 아니라 동시에 궤도를 통과하는 자기선속이 일정하게 유지되도록 상대좌표  $r$ 의 크기가 증대되거나 감소한다. 그러므로, 채움인수가  $\nu = 1/3$ 이고 양자수가  $m = -1$ 인 상태에 있는 전자쌍에 CS 자기선속을 0에서  $\Phi = -2\phi_0$ 로 증가시킬 때, 전자쌍의 나중상태는 지름방향 파동함수가  $u_{|m+\alpha}(r) = u_3(r)$ 이다. 이때의 궤도는 정자기장  $B$ 에 의한 3개의 선속 양자와 반대 방향으로 배열된 2개의 CS 선속 양자를 둘러싸므로 알짜 선속은 본래  $m = -1$ 인 전자궤도에 대한 값과 같다.

단열 근사에서는 바닥 LL( $m=0, -1, -2, \dots$ )에 있는 상태는 꼴롱 상호작용이 없는 경우에 모두 축퇴되어 있으므로 CS 입자쌍은 본래의 전자 쌍의 에너지와 같은 값을 가진다. 다만 꼴롱 상호작용이 켜질 때  $r$ 의 평균값이 더 큰 상태의 에너지는 더 낮아진다. 이러한 결과는  $\hbar\omega_c^*$ 에 비례하는 새로운 에너지 척도를 도입하는 평균장 근사 CF 계산과는 대조적이다. 평균장 근사에서는 에너지가, 꼴롱 에너지  $e^2/l_0$  대신,  $\hbar\omega_c^*$ 에 비례하는 들뜸이 대두된다.

### XV. Laughlin-Jain 상태에 대한 사고 실험

Laughlin 상관효과를 포함하고 있는 시행함수를 알아내는 데 유용한 한 가지 방법은 앞절에서 소개한 자기선속을 단열적으로 부착시키는 방법을 활용하는 것이다 [49].

자기장 값이  $B_{\nu=1}$ 일 때 채움인수가  $\nu = 1$ 인 상태에서 출발하자. 단일입자 상태함수  $\psi_m(z) = e^{im\phi} u_{0m}(r)$ 와 반대칭화 연산자  $\mathcal{A}$ 를 써서 나타낸 반대칭  $N$ -입자 상태  $\Psi(1, 2, \dots, N) = \mathcal{A} \prod_{j=1}^N \psi_{1-j}(z_j)$ 는 식 (9)와 같은 형태의 파동함수가 된다. 다만 이때는 식 (9)의  $l_0$ 는  $l_1 = (\hbar c/eB_1)^{1/2}$ 로 대체된다. 이제 단열적으로  $B$ 를  $B_{\nu=1}$ 에서  $B_{\nu=1/3} = 3B_1$ 로 증가시키면서 동시에 외부 정자기장  $B$ 와는 반대방향의 CS 선속 양자 2개씩을 각각의 전자에 부여하자.  $\nu = 1$ 인 상태함수에는 두 가지 변화가 나타난다. 먼저  $l_1$ 은  $l_{1/3} = \sqrt{3}l_0$ 으로 대체되며 다음은 각각의 입자쌍  $< i, j >$ 에 단열적으로 CS 선속을 부여함에 따른 효과를 반영하고자 Laughlin-Jastrow 인자  $\prod_{< i, j >} z_{ij}^2$ 가 도입된다. 이와 같이 얻는 파동함수는 바로 Laughlin이 제시한 파동함수 형태이다.

Laughlin 상태에 대한 논의와 정확히 같은 생각을 Jain 수열 (Jain sequence)에 나타나는 상태에도 확장할 수 있



다. 예를 들자면, 채움인수가  $\nu = 2/5$ 인 상태를 생각하자. 스핀편극된  $N$ 개 전자들이 2개의 LL을 가득 채우고 있는 상태에서 출발하자. 이러한 상태에 대한 파동함수는 바닥 ( $n = 0$ ) LL과 첫째 들뜬 ( $n = 1$ ) LL에 대한 에너지가  $E_{nm}$ 인 단일입자 상태함수  $\Psi_{nm}(\vec{r}) = e^{im\phi} u_{nm}(r)$ 의 곱으로 이루어지는 반대칭 함수이다. 지름방향 함수  $u_{nm}$ 은 자기장이  $B = B_{\nu=2}$ 일 때의 자기길이  $l_2$ 와 버금 라게르 다항식  $L_n^{|m|}$ 을 써서 나타낼 수 있으며 다음과 같다.

$$u_{nm}(r) = \left[ \frac{n!}{2\pi l_2^2 2^m (n + |m|)!} \right]^{1/2} \left( \frac{r}{l_2} \right)^{|m|} \times L_n^{|m|} \left( \frac{r^2}{2l_2^2} \right) \exp \left( -\frac{r^2}{4l_2^2} \right). \quad (48)$$

이제 정자기장  $B$ 를  $B_2$ 에서  $B_{2/5} = 5B_2$ 로 올림과 동시에 각각의 전자마다 CS 선속을  $\alpha = 0$ 에서  $|\alpha| = 2$ 가 되도록 증가시킨다. 이때 단일입자 파동함수에 나타나는 i) 자기길이  $l_2$ 는  $l_2 \rightarrow l_{2/5} = \sqrt{5}l_2$ 가 되고 ii) Laughlin-Jastrow 인자  $\prod_{\langle i,j \rangle} z_{ij}^2$ 가 도입된다. 이렇게 얻은 결과가 바로 Jain이 제안한 시행함수이며,  $B = B_{2/5}$ 일 때의 LLL 상태 Hilbert 공간안에 놓임을 확인할 수 있다.

CS 선속을 단열적으로 도입하는 방식은 Laughlin 상관작용을, 평균장 근사에 의존하지 않고, 자동적으로 반영할 수 있다는 점은 매우 흥미로운 점이다. 자기장이  $B_{1/3}, B_{2/5}$  등과 같이 큰 값인 경우에 시행함수는 항상 가장 낮은 LL에 놓이므로 꼴롱 상호작용이 없을 때의 에너지는 전혀 변하지 않는다. Laughlin 상관효과는, 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 이 최소인 두 입자 상태를 기피하기 때문에, 꼴롱 작용이 걸린 상태에서 전체 다중도  $f_L(N, l)$  중에, 척력이 최소이면서 낮은 에너지 값을 가지는, 부분 집합인  $f_L(N, l^* = l - N + 1)$  상태들을 추려낸다.

## XVI. 복합 페르미 입자 계통

전자들의 응축상태에 대한 Laughlin QP들이 딸 상태를 이루고, 이들 딸 상태들이 새로운 QP들을 반복해서 이루게 된다는 Haldane이 제안한 응축상태의 계통 이론 (hierarchy theory)을 살펴보자 [50]. Haldane은 QP들을 보제 입자로 취급하였으며 QP들 사이의 ‘잔여’ 상호작용 (residual interaction)에 대한 자세한 정보가 없는 상태에서 QP들이 단순히 Laughlin 상관효과를 나타낼 것으로 가정하였다. 원리적으로 Haldane 계통에는 분모가 홀수 ( $2p + 1$ ;  $p$ 는 정수)인 모든 분수채움 인수가 다 포함된다. Jain이 제시한 CF 모형 [27,28,51]은 수열

$\nu = n(1 + 2pn)^{-1}$  (단,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ )에 속하는 홀수 분자에 대한 직관적인 모형이다. 이미 VIII절에서 기술한 바와 같이 Jain 상태들은 CF 입자들에 의한 정수 양자 홀 상태라고 볼 수 있다. Haldane 계통에 속하는 모든 분수채움이 Jain 계통에 나타나지는 않으며, 비압축성 상태에 대한 Haldane 계통과 Jain 계통 사이의 관계는 자명하지 않은 상태이다. 예를 들자면, Haldane 계통에 나타나는  $\nu = 4/11$ 과  $\nu = 4/13$  상태는 채움인수가 Jain 수열  $n(1 + 2pn)^{-1}$ 로 표시되는 스핀편극된 상태로 나타낼 수 없다.

Sitko, Yi, Quinn [52]은 부분적으로 채워진 CF 껍질의 딸 상태들이 발견되지 않은 홀수 분모 분수채움 상태를 바르게 설명할 수 있을 가능성을 탐구하기 위해서 “CF 계통 구조”를 제안하였다. 가득 찬 CF 껍질의 기여는 무시하고 “부분적으로 채워진 CF 껍질에 놓인 CF QP들에게 CS 변환을 반복 적용할 수 있다”는 가정하에 다음과 같은 새로운 계통 구조를 얻을 수 있다.

$$\nu_l^{-1} = 2pl + (n_{l+1} + \nu_{l+1})^{-1} \quad (49)$$

위의 식에서  $\nu_l$ 은 계통의  $l$ 번째 단계의 QP 채움인수이고,  $2pl$  (단,  $p_l$ 은 정수)은 CS 변환을 통해서  $(l + 1)$ 번째 단계에 새로운 QP를 생성하기 위해서 QP당 더해준 자기선속 양자의 갯수이다. 그리고  $n_{l+1}$ 은 새로운 CF QP들로 완전히 채워진 껍질의 갯수이다.  $(n + 1)$ 번째 단계에서 가장 낮은 QP 껍질의 유효 각운동량  $l_{n+1}^*$ 은 다음과 같다.

$$l_{n+1}^* = l_{QP,n}^* - p_n(N_{QP,n} - 1) \quad (50)$$

위의 표현에서  $l_{QP,n}^*$ 과 QP 갯수  $N_{QP,n}$ 은 계통의  $n$ 번째 단계에 대한 값들이다. 계통의  $(l + 1)$ 번째 단계에서 QP 껍질을 모두 채우게 되어  $\nu_{l+1}$ 가 0이 되는 경우에는 간단히  $\nu_l = 1/[2pl + n_{l+1}^{-1}]$ 이다. 이런 접근 과정을 거치면 Haldane 계통의 모든 분수채움 상태를 얻을 수 있으며, Jain 계통과 Haldane의 반복 분수채움을 연결할 수 있게 된다.

그러나, 이러한 논의의 바탕에는 i) 전자들이 스핀편극된 계를 이루고 있다는 점과 ii) CF QP 들뜸, 즉 각운동량 껍질을 부분적으로 채우고 있는 CF들은 모두 Laughlin 상관작용을 따른다는 가정이 깔려있다. Sitko 등 [52]에 의한 이와 같은 CF 계통 이론은 그 근거가 합당한 가정에 기초하고 있으며, 일부 전자들에게는 선속 양자 2개씩 배당하고 또 다른 전자들에게는 선속 양자를 4개씩 배당하는 이른바 CF<sup>2</sup>나 CF<sup>4</sup> 복합 페르미 입자를 도입하는 제안 [53,54]에 앞서 제시된 흥미로운 이론이다.

한 가지 예로서, CF 계통 이론을  $N = 8$ 개 전자들이  $2l_0 = 18$  상태에 있는 경우에 적용해 보자. 전자들에게 CF 변환을 적용하여 얻게 되는 계통의 첫째 단계의 유효 각운동량  $l_1^*$ 을 다음과 같다.

$$2l_1^* = 2l_0 - 2p_0(N - 1) \quad (51)$$

$p_0 = 1$ 일 때  $2l_1^* = 4$ 이며 첫 단계의 CF 껍질은  $2l_1^* + 1 = 5$ 개의 CF 입자들을 받을 수 있으므로 8개 중에 나머지  $N_{QE,1} = 3$ 개의 QE들은 각운동량이  $l_{QE,1}^* = l_1^* + 1 = 3$ 인 다음 껍질을 채우게 된다. 그러므로 1단계 CS 변환에서 QE들로 가득 찬 껍질의 갯수는  $n_1 = 1$ 이다. 들뜬 CF 껍질에 들어있는 이들 3개의 QE들에게 CS 변환을 다시 적용하면 둘째 단계의 CF 껍질의 유효 각운동량  $l_2^*$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$2l_2^* = 2(l_1^* + 1) - 2p_1(N_{QE,1} - 1) \quad (52)$$

이제  $p_1 = 1$ 을 택하면  $2l_2^* = 6 - 2(3 - 1) = 2$ 가 되므로  $l_2^* = 1$ 이 된다. 이 CF QP 껍질에는  $2l_2^* + 1 = 3$ 개의 QE를 놓을 수 있으므로  $n_2 = 1$ 이며  $\nu_2 = 0$ 이 된다:

$$\nu_1^{-1} = 2p_1 + (n_2 + \nu_2)^{-1} = 3 \quad (53)$$

1단계 CS 변환에서 얻은 QE 채움인수는  $\nu_{QE} = 1/3$ 이다. 따라서 계통 관계 식 (49)를 써서 전자 채움인수  $\nu$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\nu = \frac{1}{2p_0 + (n_1 + \nu_1)^{-1}} = 4/11 \quad (54)$$

그러므로 전자 채움인수가  $\nu = 4/11$ 인 상태는 각운동량이  $l_{QE} = 3$ 인  $\nu_{QE} = 1/3$ 에 있는 QE 상태에서 기인하는 스핀편극된 Laughlin 상관 상태  $\nu = 4/11$ 일 가능성이 예상된다.

Fig. 11은 전자의 갯수와 디랙 홀극 세기가 각각  $N = 8$ 과  $2l_0 = 18$ 인 상태에 대하여 하밀토니안을 수치 대각화하여 얻은 낮은 에너지 영역 스펙트럼을 나타낸 것이다. 가장 낮은 상태들로 이루어진 에너지띠는 총 각운동량이  $L = 0, 2, 3, 4, 6$ 인 다중도가 5이다. 이들 5개 상태들은 각운동량이  $l_{QE} = 3$ 인 QE 3개의 각운동량 합성에 의한 상태들이다. 그러나  $L = 0$ 과  $L = 3$  상태는 에너지가 매우 높은 반면  $L = 2$ 인 상태는  $L = 4$ 와  $6$ 인 상태보다 에너지가 약간 낮다. 다시 말하면, CF 변환을 거듭 적용하여 얻는 QE들의 딸 상태가  $L = 0$ 인 비압축 바닥상태를 드러내 보이지 않는다. Fig. 11의 결과가 예시하는 바와 같이 CF 계통 이론이나 Haldane 계통에서 예견되는 모든 상태들이 실험에서 관측되는 것은 아니며 그 이유는 아직 완벽하게 밝혀지지 않은 상태이다.

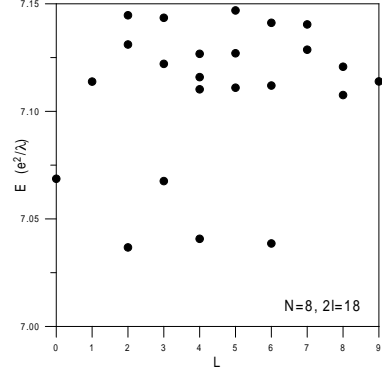


Fig. 11. Low energy states of the spectrum of 8 electrons at monopole strength  $2l = 18$ . The lowest energy band contains 3 QE's each with angular momentum  $l_{QE} = 3$ . Reapplying the CS mean-field approximation to these QE's would predict an  $L = 0$  daughter state corresponding to  $\nu = 4/11$ . However, the numerical experiment confirms that this is not valid.

## XVII. 준입자 상호작용

Chern-Simons 변환에 대한 평균장 근사 방법은 임의의 자기장 값에서 얻은 낮은 에너지 스펙트럼 구조를 빠르게 예측할 수 있었다. 그러나 정확한 수치 대각화 계산 결과는 QP-QP 사이에 남아 있는 ‘잔여 상호작용’이 존재함을 알려주고 있다. Laughlin 응축상태가 바닥 ‘진공상태’ (vacuum state)인 계의 기본들뜸 (elementary excitation)은 QE이나 QH과 같은 QP들이다. CF QP이 여러 개 나타나는 계의 에너지 스펙트럼은 현상론적인 페르미 액체 모형 (phenomenological Fermi liquid model)을 써서 얻을 수 있다. Laughlin 비압축성 바닥상태에 QE이나 QH과 같은 기본들뜸을 일으키는 데는 유한한 에너지  $\epsilon_{QE}$  또는  $\epsilon_{QH}$ 가 필요하다. 여러 개의 QE이나 QH들은  $V_{QE-QE}$ ,  $V_{QE-QH}$ ,  $V_{QH-QH}$ 로 나타내는 상호작용을 한다. 페르미 QP들로 이루어진 페르미 액체의 총 에너지  $E$ 는 Laughlin 바닥 ‘진공상태’ 에너지  $E_0$ , QP 날개의 에너지  $\epsilon_{QP}$ , QP-QP 슈도퍼텐셜  $V_{QP-QP'}$ 을 써서 다음과 같이 나타낸다 [4,55-58].

$$E = E_0 + \sum_{QP} \epsilon_{QP} n_{QP} + \frac{1}{2} \sum_{QP, QP'} V_{QP-QP'}(L) n_{QP} n_{QP'} \quad (55)$$

위의 표현에서  $n_{QP}$ 은 QP의 갯수이며, 마지막 항은 각운동량이  $L$ 인 상태에 있는 QP 쌍들 사이의 상호작용이 총 에너지에 주는 기여를 나타낸다.

주어진 계에 대한 QP 날개의 에너지  $\epsilon_{QP}$ 와 QP-QP 슈도퍼텐셜  $V_{QP-QP'}$ , 즉  $V_{QE-QE}$ ,  $V_{QE-QH}$ ,  $V_{QH-QH}$ 는

수치 대각화 방법으로 추출해 낼 수 있다. QE이나 QH 1개만 가지는 상태의 에너지와 Laughlin  $L = 0$  바닥상태의 에너지를 비교함으로써 QP 에너지  $\epsilon_{QP}$ 를 추산할 수 있다. 예를 들면,  $N = 10$ 인 경우는  $2Q = 27 - 1 = 26$ 일 때 각운동량이  $L = N/2 = 5$ 인 바닥상태 에너지는 QE이 1개 있는 계의 에너지이고,  $2Q = 27 + 1 = 28$ 일 때 각운동량이  $L = N/2 = 5$ 인 바닥상태 에너지는 QH이 1개 있는 계의 에너지이다 (Fig. 3(a)와 (c) 참조). QP 상태는 바닥상태일 때와는 다른 값의  $2Q$ 에서 나타나므로 단일 QP 에너지를 산출할 때는 계의 크기효과가 일어날 수 있다. 해당되는  $2Q$ 에서  $\ell = R/\sqrt{Q}$  (단,  $R$ 은 Haldane 구의 반지름)로 바르게 나타낸 에너지 단위  $e^2/\ell$ 을 써서 얻은 결과를  $N^{-1}$ 로 외삽하면 거시 계에서 신뢰할 수 있는  $\epsilon_{QE}$ 와  $\epsilon_{QH}$ 를 얻을 수 있다. Fig. 3(b)와 (d)는 각각 QE 2개와 QH 2개가 존재하는 경우에 대한 결과이다. Fig. 3(b)에 보인 QH의 각운동량은  $l_{QH} = 11/2$ 이며, 허용되는 QH 쌍 각운동량은  $L = 0, 2, 4, 6, 8$  및 10이다. Fig. 3(d)는 QE의 각운동량이  $l_{QE} = 9/2$ 인 경우이며, 허용되는 QE 쌍의 각운동량은  $L = 0, 2, 4, 6$  및 8이다. QP-QP 간에 잔여 상호작용이 없다면 모든 두 QP계의 에너지는 각운동량에 관계없이 단일 QP 에너지의 2배, 즉  $2\epsilon_{QP}$ 이어야 한다.  $N = 10$ 일 때의 QP-QP 슈도퍼텐셜  $V_{QE-QE}$ ,  $V_{QE-QH}$ ,  $V_{QH-QH}$ 는 Fig. 3(d)의  $2Q = 25(QE - QE)$ , Fig. 2의  $2Q = 27(QE - QH)$  및 Fig. 3(b)의  $2Q = 29(QH - QH)$ 인 경우에 대한 2QP 상태의 에너지와 Fig. 2에 보인  $2Q = 27$ 일 때의  $L = 0$  Laughlin 바닥상태 에너지 및 대응하는 상호작용하지 않는 QP 에너지로부터 얻을 수 있다 [39,57]. 쌍 각운동량은  $L' = 2l_{QP} - \mathcal{R}$ 이므로 수치계산 결과로부터  $V_{QP-QP'}(\mathcal{R})$ 를 계산해 낼 수 있다.  $V_{QE-QH}$ 와 같이 서로 다른 QP 사이의 슈도퍼텐셜은 QP 쌍의 각운동량  $L'$ 의 값에 의존하나, 같은 종류의 QP 사이의 슈도퍼텐셜은 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 에 의존한다 [4]. 반대 부호의 전하로 대전된 두개의 QP은 결합상태를 이루며 두 QP을 잇는 선분에 수직인 방향으로 전하가 흘러가게 된다. 이때 두 QP간의 간격은 쌍 각운동량  $L_{12}$ 의 값에 의존한다. 여기서  $L_{12}$ 는  $L_{12} = 2l_{QP} - j$  ( $j$ 는 홀수)의 형태로 양자화 되어 있다. 같은 부호로 대전된 두 QP들은 서로 밀어내면서 정자기장의 영향으로 상대 QP 주위를 회전한다. 이때 이들 간의 거리는 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 의 값에 의존한다.

Fig. 12는  $N = 6 \sim 11$ 인 계에 대한 수치 대각화 작업을 행함으로써  $\nu = 1/3$ 과  $\nu = 1/5$  상태에 있는 QP들의 슈도퍼텐셜  $V_{QE-QE}(\mathcal{R})$ 과  $V_{QH-QH}(\mathcal{R})$ 을 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 의 함수로 나타낸 것이다.  $\nu = 1/3$ 과  $\nu = 1/5$  Laughlin 상태에 있는 QE들의 상호작용 특성이 매우 유

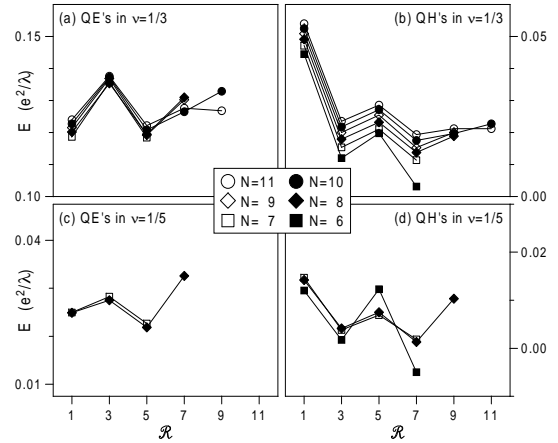


Fig. 12. The pseudopotentials of a pair of quasielectrons (left) and quasiholes (right) in Laughlin  $\nu = 1/3$  (top) and  $\nu = 1/5$  (bottom) states, as a function of relative pair angular momentum  $\mathcal{R}$ . Different symbols indicate data obtained in the diagonalization of between six and eleven electrons.

사하며 QH도 두 상태  $\nu = 1/3$ 과  $\nu = 1/5$ 에서 또 다른 공통된 특성을 지니고 있음을 확인할 수 있다. Fig. 12(a)와 (c)에서  $V_{QE-QE}(\mathcal{R} = 1) < V_{QE-QE}(\mathcal{R} = 3)$ 이고  $V_{QE-QE}(\mathcal{R} = 5) < V_{QE-QE}(\mathcal{R} = 7)$ 이므로 슈도퍼텐셜  $V_{QE-QE}(\mathcal{R})$ 은 상대 각운동량  $\mathcal{R} = 1$ 과 5에서 버금조화적임을 알 수 있다. 아울러,  $V_{QH-QH}(\mathcal{R})$ 는 Fig. 12(b)와 (d)에 보인 바와 같이  $\mathcal{R} = 3$ 과 7에서 버금조화적이다.

Fig. 12에 쓰인 서로 다른 기호는 전자의 갯수  $N$ 이 6 ~ 11 사이의 다른 값일 때의 해당 슈도퍼텐셜을 나타낸다. 주어진 상대 각운동량 값에서 전자의 갯수가 변함에 따라  $V_{QP-QP}(\mathcal{R})$ 가 조금씩 다른 값을 나타내는 계의 크기효과가 나타남을 의미한다. 이들 슈도퍼텐셜을  $N^{-1}$ 의 함수로 나타내 보면  $V_{QP-QP}(\mathcal{R})$ 의 수렴성을 점검할 수 있다. Fig. 13은 상대 각운동량이 각각  $\mathcal{R} = 1, 3$  및 5인 경우에 대한  $V_{QE-QE}(\mathcal{R})$ 를  $N^{-1}$ 의 함수로 나타낸 결과이며, 각각의 상대 각운동량 상태의 슈도퍼텐셜이  $N^{-1} \rightarrow 0$ 인 극한에서 한 가지 값으로 잘 수렴함을 확인할 수 있다. 이러한 극한은  $N \rightarrow \infty$  또는  $2Q \rightarrow \infty$ 인 영역에 대응한다. 바닥상태의 본성은 QP-QP 간격이 작은 경우 또는 상대 각운동량  $\mathcal{R}$ 이 작은 경우에 해당하는 짧은 거리 상호작용이 결정하므로 전자의 갯수가 적은 계에 대한 수치연산 결과는 거시적인 계의 상관작용 효과의 주요 특성을 잘 기술할 수 있게 된다.

XIII절에서 기술한 첫째 들뜬 LL 상태의 슈도퍼텐셜에 대한 논의에서 알아보았듯이  $\mathcal{R} = 1$ 과 5에서는 QE들간의 Laughlin 상관작용이 일어나지 않는다. QH들간에는 Laughlin 상관작용이  $\mathcal{R} = 3$ 에서는 일어나지 않는다. 이런 결과는 바로  $\nu_{QE} = 1/3$  및  $1/7$  상태와  $\nu_{QH} = 1/5$

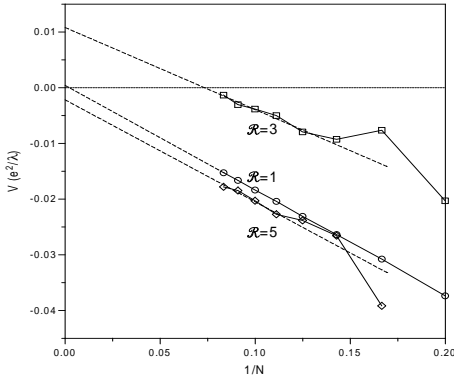


Fig. 13. Quasielectron pseudopotential  $V_{QE-QE}(\mathcal{R})$  as a function of  $N^{-1}$ , the inverse of the particle number for the values of relative angular momenta  $\mathcal{R} = 1, 3,$  and  $5$ . Extrapolation to  $N^{-1} \rightarrow 0$  corresponds to an infinite planar macroscopic system.

상태는 “CF 계통 이론”에서 예측한 비압축성 딸 상태를 이루지 않음을 암시한다. 따라서, Laughlin 상관 비압축성  $\nu = 1/3$  상태 ( $\nu = 1/5$  상태)의 QE (QH)들이 채움인수가  $\nu_{QE} = 1/3$  ( $\nu_{QH} = 1/5$ )인 QP 상태를 일으키는 스핀편극된 계에서는 “QP들간의 Laughlin 상관효과에 기인하는 딸 상태”, 예를 들면,  $\nu = 4/11$  ( $\nu = 4/13$ )를 얻는 것은 불가능하다. 그렇다면, 최근에 관측된 채움인수가  $\nu = 4/11$ 와  $\nu = 4/13$ 인 비압축 상태 [53]의 정체가 궁금하다.

### XVIII. 준입자쌍 형성과 새로운 비압축성 상태

특정한 QP 채움인수  $\nu_{QP}$ 에 대응하는 QP 상태에서는 QP 사이의 상호작용이 Laughlin 형태의 상관작용이 아니라면, 해당되는  $\nu_{QP}$ 에서 관측되는 비압축성 상태는 다음과 같은 두 가지일 가능성을 암시한다. 앞서 논의에서 우리는 전자들이 스핀편극된 계를 이룬다고 가정하였다. 그러나, 부분적으로 채워진 CF 껍질의 CF 들뜸은 완전히 채워진 LL에 있는 CF들과는 그 스핀이 반전된 상태에 있을 수도 있다. 이때 스핀이 반전된 CF들 사이의 상호작용이 초조화적 Laughlin 형으로 표현되면 새로운 스핀 반전 CF QP들 사이의 딸 상태에서 Laughlin 상관작용이 유효할 수 있다. 채움인수가  $4/11$ 인 비압축성 상태의 본성을 이해하기 위한 방법으로 이러한 스핀 반전 CF에 대한 제안이 보고된 바 있다 [54]. 그러나, 비압축성 상태가 스핀 반전된 QE (RQE)들에 기인하는가를 판정하려면 스핀 반전된 QE의 슈도퍼텐셜  $V_{RQE-RQE}(\mathcal{R})$ 에 대한 규명이 필요하다. 스핀 반전된 QE들의  $V_{RQE-RQE}(\mathcal{R})$ 은

$\mathcal{R} = 1$ 에서 약하게나마 초조화적이며 [59] 이는 스핀편극되지 않은 딸 상태가 비압축성 상태일 가능성을 암시한다. 또 다른 좀더 흥미로운 가능성은 CF QP들이 짝을 이루는 경우이다 [60]. 2개의 전자들간 슈도퍼텐셜  $V_1(\mathcal{R})$ 이 초조화적이 아닌 첫째 들뜬 ( $n = 1$ ) LL 상태인 경우에 전자들은 쌍을 이룬다. 이와 같은 경향이 바로 XVII절에서 알아본 특정한  $\mathcal{R}$ 에서  $V_{QP-QP}$ 가 드러내 보이는 특성이다.

이제  $\mathcal{R} = 1$ 에서 초조화적인 경우와 비금조화적인 특성을 보이는 다음과 같은 모형 슈도퍼텐셜을 생각하자.

$$\Delta V(\mathcal{R}) = \Delta_1 \delta_{\mathcal{R},1} + \Delta_3 \delta_{\mathcal{R},3}$$

$\Delta_3$ 이 매우 크다면 Laughlin 상관작용 특성을 보이는 바닥상태는 불가능하다. 이런 사실은 다음과 같이 확인해 볼 수 있다. i)  $\Delta_3 = 0$ 일 때  $2Q = 3(N-1)$ 에서 나타나는 Laughlin 상관  $L = 0$ 인 바닥상태는  $\mathcal{G}_0(\mathcal{R} = 1)$ 가 가능한 최소값이어야 하며, ii)  $\Delta_3 > 0$ 이면  $\mathcal{G}_0(\mathcal{R} = 3)$ 는  $\Delta \mathcal{G}$ 만큼 감소하고, (iii) 따라서 첫째 합규칙, 식 (38)을 만족하도록 다른 짝 진폭함수  $\mathcal{G}_0(\mathcal{R})$ 는 증가해야 한다.

문제가 단순해지도록  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 1)$ 과  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = j)$  (단,  $j$ 는  $2l$ 과  $5$  사이에 오는 홀수임)만 증가하는 경우를 살펴보자. 이제  $\Delta \mathcal{G}(\mathcal{R} = 1) = x_j \Delta \mathcal{G}$ 와  $\Delta \mathcal{G}(\mathcal{R} = j) = (1 - x_j) \Delta \mathcal{G}$  및  $\Delta \mathcal{G}(\mathcal{R} = 3) = -\Delta \mathcal{G}$ 로 택하면 첫째 합규칙, 식 (38)은 저절로 만족된다. 둘째 합규칙, 식 (39)를 쓰면  $x_j$ 는  $x_j = 1 - 2(4l-3)(4l-j)^{-1}(j-1)^{-1}$ 이어야 한다.  $\Delta_1$ 과  $\Delta_3$ 이 유한한 경우의  $L = 0$  바닥상태 에너지 변화는 다음과 같다.

$$\Delta E_0 = \Delta \mathcal{G}(x_j \Delta_1 - \Delta_3) \tag{56}$$

그러므로,  $\Delta_3 > x_j \Delta_1$ 일 때 에너지 변화  $\Delta E_0 < 0$ 이다. 예를 들면,  $j = 5$ 일 때  $x_5 = (4l-7)(8l-10)^{-1}$ 이며,  $\Delta_3 = x_5 \Delta_1$ 는  $\Delta V(\mathcal{R})$ 가  $\mathcal{R} = 1$ 과  $5$  사이에서 조화적인 특성을 나타내게 되는 값과 정확히 일치한다. 이때  $V(\mathcal{R})$ 는  $\mathcal{R} = 3$ 에서 항상 초조화적인 반면,  $\mathcal{R} = 1$ 에서는  $\Delta_3 < x_5 \Delta_1$ 인 경우에만 초조화 형이다.  $\Delta \mathcal{G}$ 가  $\mathcal{R} = 1$ 과  $5$ 인 곳으로 옮겨감에 따라  $x_j$ 는 최소값을 이루게 된다. 짝 진폭함수가  $\mathcal{R} = 1$ 인 입자쌍 상태로 이동하면서  $\mathcal{R} = 3$ 의 짝 진폭함수가 감소하는 현상이 바로 ‘ $\mathcal{R} = 1$ 인 페르미 입자쌍이 형성되고  $\mathcal{R} = 3$ 인 입자쌍을 기피한다’는 분명한 증거이다. 입자의 갯수가 적은 계에 대한 수치연산 실험결과는 슈도퍼텐셜이 초조화 형이 아닌 경우에 이와 같은 모형의 예측을 뒷받침한다. [37,61,62]

Fig. 14는 서로 다른 3가지 QE 계의 슈도퍼텐셜을 이용해서 얻은 낮은 에너지 스펙트럼과 바닥상태의 진폭함

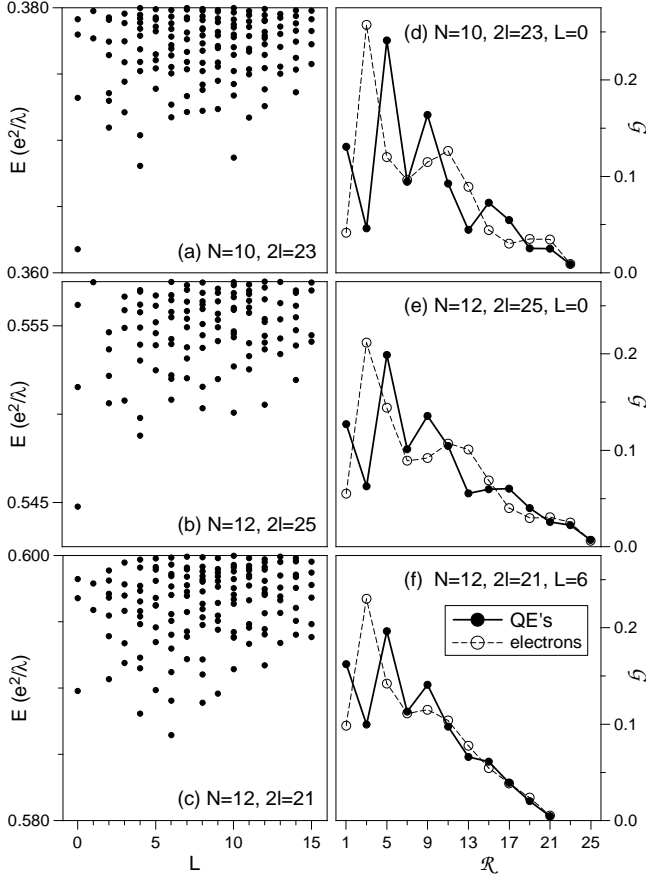


Fig. 14. Low energy spectra as a function of total angular momentum  $L$  for (a)  $N = 10$  QE's at  $2l = 23$ , (b)  $N = 12$  QE's at  $2l = 25$ , and (c)  $N = 12$  QE's at  $2l = 21$  and pair amplitude functions  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$  for the ground states presented in (a), (b), and (c) as a function of relative pair angular momentum  $\mathcal{R}$ . The solid circles are the ground state values of  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$  for the QE pseudopotentials. The open circles are the values for the superharmonic electron pseudopotential. All spectra were obtained using  $V_{\text{QE}}(\mathcal{R})$  given in Ref. [33].

수에 대한 계산 결과이다. Fig. 14(a)와 (d)는  $(N; 2l) = (10; 23)$ 일 때 채움인수가  $\nu_{\text{QE}} = 1/3$ 과  $\nu = 4/11$ 인 경우에 대한 결과이고, (b)와 (e)는  $(N; 2l) = (12; 25)$ 와  $\nu_{\text{QE}} = 1/2$ 과  $\nu = 3/8$ 인 경우에 대한 결과이며, (c)와 (d)는  $(N; 2l) = (12; 21)$ 로 역시  $\nu_{\text{QE}} = 1/2$ 과  $\nu = 3/8$ 일 때의 결과이다. Fig. 14(d), (e), (f)에는 QE의 경우와 비교할 수 있도록 초조화적으로 상호작용하는 전자들인 경우에 대한 짝 진폭함수를 속인 빈 동그라미로 함께 표시하였다. 참고문헌 [33]에서 보인 슈도퍼텐셜을 써서 얻은 결과이다. 채움인수가  $\nu_{\text{QE}} = 1/3$ 인 상태는  $4 \leq N \leq 12$ 인 경우에 있어서 에너지 스펙트럼을 수치연산해서 얻은  $2l = 3N - 7$  계열에 나타나는 여러 상태들 중에 하나이다. 나머지 두 상태는  $2l = 2N + 1$  계열과  $N$ 을 QH의 갯수  $2l + 1 - N$ 으로 대체해서 얻은  $2l = 2N - 3$

계열에 속하며 채움인수가  $\nu_{\text{QE}} = 1/2$ 과  $\nu = 3/8$ 인 상태이다. (a)와 (b)에는  $L = 0$  바닥상태와 들뜬상태 사이에 상당히 큰 띠간격이 존재한다. 한편, (c)의 경우에는 단순 입자쌍 모형 [61,62]에서는  $L = 0$  바닥상태가 예상되지만 슈도퍼텐셜 수치계산 결과에는 보이지 않는다.

$V_{\text{QE-QE}}(\mathcal{R})$ 은  $\mathcal{R} = 3$ 에서 최대값을 가지므로 QE들은 상대 각운동량이  $\mathcal{R} = 1$ 인 입자쌍을 이룸으로써  $\mathcal{R} = 3$ 에서의 입자쌍 진폭을 최소화 시킨다. 실제적으로 결합된 두 페르미 입자들은 보제 입자로 취급할 수 있으며, 2차원 계에서는 CS 변환을 거침으로써 보제 입자와 페르미 입자 통계는 서로 변환 가능하다 [20,41,42]. 각운동량이  $l$ 인 페르미 입자로 이루어진 입자쌍 1개의 최대 각운동량은  $L' = 2l - 1$ 이고 최소 상대 각운동량은  $\mathcal{R} = 1$ 이다. 그러나, 입자쌍이 여러 개 존재하는 경우에 입자쌍들에게 허용되는 총 각운동량은 서로 다른 입자쌍에 속하는 동등한 성분 페르미 입자들이 파울리 원리를 위배하지 않도록 주의해서 산출해야 한다. 첫째 들뜬 LL에 있는 전자들을 취급할 때와 동일한 방식으로 취급하면 된다. 입자쌍을 페르미 입자로 취급하면 2개의 입자쌍에게 허용되는 총 각운동량의 최소값은 다음과 같다.

$$L' \equiv 2l_{\text{FP}} = 2(2l - 1) - \gamma_{\text{F}}(N_{\text{P}} - 1) \quad (57)$$

위의 표현에서  $N_{\text{P}}$ 는 각운동량이  $l$ 인 QE의 갯수이므로  $N_{\text{P}} = N/2$ 이며  $\gamma_{\text{F}} = 3$ 이다. 식 (57)은 각각의 입자쌍에 3개의 선속 양자  $\phi_0$ 을 부여하는 CS 변환을 적용해서 얻는 결과와 동일하다. 물론, 단일 페르미 입자쌍 (Fermion pair; FP)의 유효 각운동량은  $l_{\text{FP}} = 2l - 1 - \frac{3}{2}(N_{\text{P}} - 1)$ 이다. FP의 채움인수  $\nu_{\text{FP}}$ 와 QE 채움인수  $\nu_{\text{QE}}$  사이에는 XIII절에서 이미 설명한 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\nu_{\text{FP}}^{-1} = 4\nu_{\text{QE}}^{-1} - 3 \quad (58)$$

식 (58)은 크기의 차수가  $N^{-1}$ 인 항의 기여를 생략한 표현이며, 거시적인 계에서는  $N^{-1}$ 에 비례하는 항의 기여는 사라진다. 식 (57)에 나타난 CS 변환은 2개의 FP의 간격이 최소인 상태를 자동적으로 기피하게 된다. 허용되는  $2l_{\text{FP}}$ 가 최소값인 상태는 파울리 원리를 위배하지 않도록 하며 날개의 QE들이 QE-QE 척력이 최대가 되는  $\mathcal{R} = 3$ 인 상태가 되지 않도록 돕는다. CS 변환은 각운동량이  $l$ 인  $N$ 개 페르미 입자로 이루어진 계의 총 각운동량이  $L$ 인 상태의 다중도  $g_L(N, l)$  가운데서 이의 부분집합인  $g_L(N_{\text{P}}, l_{\text{FP}})$ 를 추려낸다 [63].

QE의 채움인수가  $2/3 \geq \nu_{\text{QE}} \geq 1/3$  사이에 놓인 경우에 QE들은 FP를 형성할 것이 예상된다. 채움인수가

Table 2. Novel family of incompressible states resulting from pairing of composite Fermion quasiparticles in the lowest Landau level. All the states except the ones indicated in parentheses have been observed in experiments.

$\nu_{\text{FP}}$	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/13	1/15	1/17
$\nu_{\text{QE}}$	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5
$\nu$	<b>5/13</b>	<b>3/8</b>	(7/19)	<b>4/11</b>	(9/25)	(5/14)	(11/31)	6/17
$\nu_{\text{QH}}$	2/7	1/4	2/9	1/5	2/11	1/6	2/13	1/7
$\nu$	<b>5/17</b>	<b>3/10</b>	(7/23)	<b>4/13</b>	(9/29)	(5/16)	(11/35)	6/19

이 구간에 있을 때 상호작용이 초조화 퍼텐셜 형태이면서  $\mathcal{R} = 1$ 을 기피할 Laughlin-Jain 상태가 나타난다. 채움인수가  $\nu_{\text{FP}} = 1/3, 1/5, 1/7$  및  $1/9$ 인 FP 상태들을 식 (58)의 관계를 써서 변환하면 대응하는 QE 채움인수는 각각  $\nu_{\text{QE}} = 2/3, 1/2, 2/5$  및  $1/3$ 이다. 이  $\nu_{\text{FP}}$  상태들만이 QE 채움인수가  $2/3 \geq \nu_{\text{QE}} \geq 1/3$  사이에 놓이는 FP들의 Laughlin 상태들이다. 부분적으로 채워진 CF 껍질을 기술하는 계통 구조 이론 (hierarchy scheme) 식 (49)에 따르면, 전자 채움인수  $\nu$ 와  $\nu_{\text{QE}}$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\nu^{-1} = 2p_0 + (n_{\text{QE}} + \nu_{\text{QE}})^{-1} \quad (59)$$

지금은  $p_0 = 1, n_1 = n_{\text{QE}} = 1$  및  $\nu_1 = \nu_{\text{QE}}$ 이다. QH의 경우에는 상대 각운동량이  $\mathcal{R} = 3$ 인 QH 쌍을 이루면서  $\mathcal{R} = 5$ 인 상태를 기피할 것으로 예상된다. QH 채움인수  $\nu_{\text{QH}}$ 이  $1/3 > \nu_{\text{QH}} \geq 1/5$  사이에 올 때 FP 형성을 기대할 수 있다. 이와 같은 QP들이 쌍을 형성하는 모형에서 예상되는 비압축성 Laughlin FP 상태들을 Table 2에 나타내었다. 준입자쌍들 사이의 상관작용이 Laughlin 형이라면  $\nu_{\text{QE}} = 1/3, 1/2$  및  $2/3$ 와  $\nu_{\text{QH}} = 1/5, 1/4$  및  $2/7$ 에서 비압축 바닥상태가 형성되며 이에 따라 LL 채움인수가  $\nu = 5/13, 3/8, 4/11$ 와  $\nu = 5/17, 3/10, 4/13$ 에서 새로운 운운축상태를 예상할 수 있게 된다. Table 2의 괄호안의 채움인수는 실험에서 확인되지 않은 상태들이며, 그밖의 모든 상태들은 실험에서 관측되었다 [53]. 지금까지의 논의에서는 단순히 모든 QP들이 FP 형성에 참여하는 경우만 다루었다. 그러나, 이러한 가정이 실제 QP들의 상황을 너무나 단순하게 취급했을 수도 있으며 이에 대한 좀더 조직적인 확장이 필요할 수도 있다.

예를 들어, 어미 상태의 바닥 CF LL에 속하는  $l_0 = 8$  껍질을 CF 17개가 가득 채우고 CF QE 10개가 CF의 자기홀극 세기가  $2Q^* = 17$ 인 Haldane 구면에 놓여 있는 경우를 생각하자. QE 날개의 각운동량은  $l_{\text{QE}} = 17/2$ 이다. 페르미 입자쌍의 갯수가  $N_{\text{P}} = N_{\text{QE}}/2 = 5$ 인 경우를 생각하면 FP 2개의 총 각운동량은  $L' = 2l_{\text{FP}} = 16$ 이다:

$$\begin{aligned} 2l_{\text{FP}} &= 2(2l_{\text{QE}} - 1) - (\gamma_{\text{F}} - 1)(N_{\text{P}} - 1) \\ &= 2(17 - 1) - 4(5 - 1) = 16 \end{aligned}$$

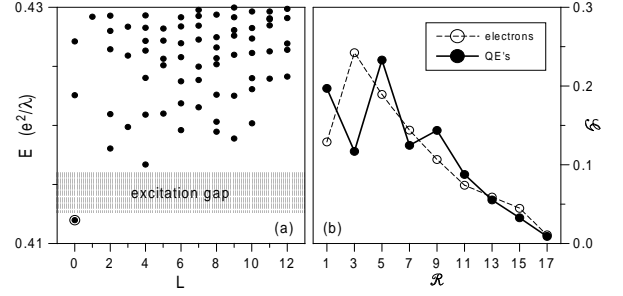


Fig. 15. (a) Energy spectra as a function of total angular momentum  $L$  of 10 QE's at  $2l = 17$  corresponding to  $\nu_{\text{QE}} = 1/2$  and  $\nu = 3/8$ . It is obtained in exact diagonalization in terms of individual QE's interacting through the pseudopotential shown in Fig. 4. (b) Coefficients  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ , the amplitude associated with pair states of relative angular momentum  $\mathcal{R}$ , for the lowest  $L = 0$  state. The solid dots are for 10 QE's of the  $\nu = 1/3$  state in a shell of angular momentum  $l = 17/2$ . The open circles are for 10 electrons in the lowest Landau level at  $l_0 = 17/2$ .

이제 각운동량이  $l_{\text{FP}} = 8$ 인 FP에 CS 변환을 한번 더 적용하면  $2l_{\text{FP}}^* = 2l_{\text{FP}} - 2p_{\text{FP}}(N_{\text{P}} - 1) = 16 - 2(2)(5 - 1) = 0$ . 그러므로  $n_2 = 0$ 이고  $\nu_2^* = \frac{N_{\text{P}} - 1}{2l_{\text{FP}}^*} = \infty$ 이다. QP 채움인수는  $\nu_{\text{QE}}^{-1} = 2p_{\text{QE}} + (n_2 + \nu_2^*)^{-1} = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ 로 결정된다. 어미상태의 바닥 CF LL  $l_0 = 16/2$  껍질을 CF 17개가 가득 채우고 있으므로  $n_{\text{QE}} = 1$ 이며  $\nu_{\text{QE}} = 1/2$ 에 대응하는 전자 채움인수는  $\nu = 3/8$ 이다:

$$\nu^{-1} = 2p_1 + (n_{\text{QE}} + \nu_{\text{QE}})^{-1} = 2 \cdot 1 + (1 + 1/2)^{-1} = 8/3$$

그러므로  $N_{\text{QE}} = 10$ 이면서  $2Q^* = 17$ 인 경우는  $\nu_{\text{QE}} = 1/2$ 와  $\nu = 3/8$ 에 대응되는 상태이다.

Fig. 15는  $(N_{\text{QE}}; 2l)$ 이  $(10; 17)$ 인 QE들이 Haldane 구면 위에 있는 경우에 대한 수치 대각화 연산을 통해 얻은 낮은 에너지 스펙트럼과 FP 상태의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 에 대한 결과이다. Fig. 15(a)의 에너지 스펙트럼은 Fig. 4에 보인 QE-QE 슈도퍼텐셜을 써서 얻은 결과이다.  $L = 0$  바닥상태는 들뜬상태들과는 에너지 띠 간격을 사이에 두고 있다. Fig. 15(b)는 허용되는 모든 상대 각운동량  $\mathcal{R}$  값에 있어서  $L = 0$  바닥상태의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 의 특성을 나타내고 있다. 검은 점으로 나타낸 결과는 Fig. 12에 예시한 QE-QE 슈도퍼텐셜을 써서  $l = 17/2$  각운동량 껍질에 있는 어미 상태가  $\nu = 1/3$ 인 QE 10개에 대하여 얻은 것이며, 이와 비교할 수 있도록 바닥 LL에 놓인 전자의 슈도퍼텐셜을 써서  $2l_0 = 17$ 인 전자 10개에 대한 진폭함수는 속이 빈 동그라미로 나타냈다. 이 전자 상태는 각운동량이  $l_{\text{QH}} = 5/2$ 인 QH 2개를 가지는 Jain이 제안한  $\nu = 3/5$  상태에 해당한다. 낮은 에너지 영역의 3개 상태의 각운동량 값이 각각  $L = 0, 2$  및 4이며,  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 는

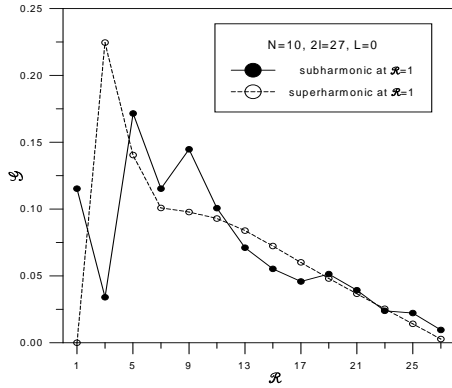


Fig. 16. Coefficients  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ , the amplitude associated with pair states of relative angular momentum  $\mathcal{R}$ , for the lowest  $L = 0$  state. The solid dots for 10 QE's in a shell of angular momentum  $l = 27/2$ . The open circles are for 10 electrons in the lowest LL at  $l_0 = 27/2$ .

가장 낮은  $L = 0$  상태에 대한 결과이다. 바닥 LL에 있는 전자들의 슈도퍼텐셜은 초조화적이며, 이 경우에 있어서 초조화 퍼텐셜로 특징지어지는 가장 낮은 3개 상태의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 3)$ 가 최대값을 가지며  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 1)$ 는 최소값이다. 이러한 특성은  $1/2 \geq \nu \geq 1/3$  구간에서 일어나는 Laughlin 상관 상태들이 나타내는 전형적인 특징이다. 한편, XVII절에서 예시한 바 있는 QE에 대한 버금조화적인 슈도퍼텐셜은 초조화 슈도퍼텐셜에 비해서  $\mathcal{R} = 1$ 의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 1)$ 가 두드러지게 큰 값이고  $\mathcal{R} = 3$ 의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 3)$ 는 작다. 이런 특성은  $\mathcal{R} = 1$ 에서 QE들이 입자쌍을 형성함으로써  $\mathcal{R} = 3$ 의 QE간 최대 척력을 피할 수 있게 되는 예상과 일치한다.

Fig. 16은 버금조화적인 슈도퍼텐셜을 나타내는  $N_{QE} = 10$  및  $2l = 27$ 인 QE의 경우와 초조화적인 슈도퍼텐셜을 가지는  $N = 10$  및  $2l_0 = 27$ 인  $n = 0$  LL에 놓인 전자에 대한  $L = 0$  상태의 진폭함수  $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 를 나타낸 것이다. QE의 경우에  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 1) \approx 1/9$ 임을 알 수 있으며, 이런 사실은  $\frac{\binom{10}{0}\binom{9}{0}}{2} = 45$  가지 가능한 FP 상태들 중에 5개의 FP가  $\mathcal{R} = 1$  상태에 해당됨을 알 수 있다.

Halperin의 제안 [64]을 바탕으로 착안한 단순한 입자쌍 모형 [61,62]을 쓰면 QE들이  $\mathcal{R} = 1$ 에서 모두 QE쌍 형성에 참여하는 ‘완전 결합’인 경우에, Table 2에 요약한 바와 같이, LL 채움인수가  $\nu = 1/3, 1/2, 2/3, 5/17, 3/10, 4/13$ 인 실험실에서 확인된 상태들의 본성을 이해할 수 있었다. 그러나, QP들이 모두 참여하는 단순 ‘완전 결합’ 모형은 너무 소박한 모형일 수 있다. 왜냐하면, 해결되어야 할 다음과 같은 두 가지 문제점이 있기 때문이다. 첫째,  $N = 8, 9, 10, 11$  및 12인 계에 대한 수치연산에서 얻은 상태들은  $\nu_{QE} = 1/3$ 인 경우에 모두  $2l = 3N - 7$  계열에 속하고,  $N = 10, 12, 14, 16$  및 18인 계에 얻은 상

태들은  $\nu_{QE} = 2/3$ 에서는 모두  $2l = \frac{3}{2}N + 2$  계열에 속한다. ‘완전 결합’ 모형은  $N$ 이 짝수일 때만 적용할 수 있으나,  $2l = 3N - 7$  계열은 모든 자연수  $N$ 에서 가능하다. 더 우기, ‘완전 결합’ 모형에서는 수치연산 실험에서 관측되는  $2l$ 과는 다른 값인  $2l = 3N - 5$ 일 때와  $2l = \frac{3}{2}N + 1$ 일 때 각각  $\nu_{QE} = 1/3$  상태와  $\nu_{QE} = 2/3$  상태가 예상된다. 이러한 불일치는 거시 계에서는 사라지게 되는 계의 유한 크기효과이더라도 불일치의 원인을 규명하는 노력은 의미 있는 일이다. 각운동량이  $l$ 인  $k$ 개의 페르미 입자들이 페르미 입자 다발 (cluster)을 형성하면 Laughlin 상관작용을 드러내는  $2l = mN - [(m - 1)k + 1]$ 인 응축상태를 이룰 수 있다 [5,65]. 이러한 페르미 입자 다발은 수치연산 실험에서 관측된 바와 같이  $2l = 2N - 3$  계열과  $2l = 3N - 7$  계열에서 상관작용으로 결합된 짝상태 (pair states)와 3중결합 상태 (triplet)를 각각 드러내 보인다. 완전한 3중상태가 형성되려면  $N$ 은 3의 배수가 되어야 하며 그래야만  $2l = 3N - 7$  계열에 나타나는 상태들을 설명할 수 있다. 단일 페르미 입자, 2입자 짝상태, 3중상태가 섞인 불완전한 다발 상태가 만들어지는 가능성에 대한 논의는 좀더 체계적인 탐구가 필요하다. 또 다른 문제점은 모든 짝수  $N$  값에 대하여  $2l = 2N - 3$  계열에 속하는 입자쌍 상태 및 전자-홀 대칭에 따른  $2l = 2N + 1$ 에 속하는 공액 상태들이 수치연산 실험에서 항상 확인되지 않는다는 점이다.

Fig. 17은 이제까지의 수치 실험에서 확인된  $2l = 3N - 7$  ( $\nu_{QE} = 1/3$ ),  $2l = \frac{3}{2}N + 2$  ( $\nu_{QE} = 2/3$ ),  $2l = 2N - 3$  ( $\nu_{QE} = 1/2$ ) 및  $2l = 2N + 1$  ( $\nu_{QE} = 1/2$ )의 관계를 요약한 것이다 [60]. 두 계열  $2l = 2N - 3$ 과  $2l = 2N + 1$ 은  $\nu_{QE} = 1/2$ 에 대응하는 서로 공액인 쌍 상태들이다. Fig. 17의 검은 정사각형과 검은 점들은 각각 수치 실험에서 확인된  $\nu_{QE} = 1/3$ 과  $\nu_{QE} = 2/3$  상태들을 나타낸다. 옅은 색의 동그라미와 사각형은 수치연산에서 확인된  $\nu_{QE} = 1/2$  상태를 나타낸 것이다.  $2l = 17$ 에서 검은 정사각형 (점)과 동그라미 (정사각형)를 겹쳐 나타낸 것은  $\nu_{QE} = 1/2$ 과  $\nu_{QE} = 1/3$  또는  $\nu_{QE} = 2/3$ 일 때이며 수치연산 결과와 일치하는 상태들이다.  $(N; 2l)$ 이  $(6;13)$ 과  $(8;13)$ ,  $(10;21)$ 과  $(12;21)$ ,  $(14;29)$ 와  $(16;29)$ 는 입자쌍이나 다발 형성 모형에서는 기대되더라도 수치연산에서는 확인되지 않는 상태들이며 각각을 Fig. 17에 ‘+’로 표시했다.

모델 슈도퍼텐셜  $U_\alpha(\mathcal{R} = 1) = 1 - \alpha$ 와  $U_\alpha(\mathcal{R} = 3) = \alpha/2$ 는 각각  $\alpha \leq 0.25$ 와  $\alpha \geq 0.75$  근처에서  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 3) \gg \mathcal{G}(\mathcal{R} = 1)$ 인 Laughlin 상관 상태와  $\mathcal{G}(\mathcal{R} = 3) \ll \mathcal{G}(\mathcal{R} = 1)$ 인 반Laughlin 상관 상태 특성을 나타낸다 [66].  $\alpha \approx 0.5$ 일 때는 첫째 들뜬 LL의 전자들처럼 진폭함수가

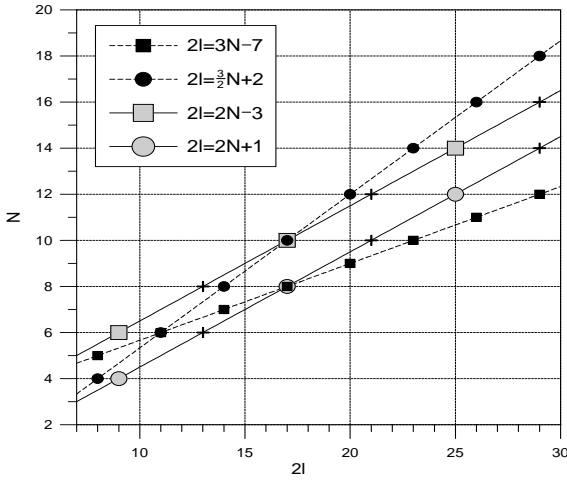


Fig. 17. The sequences of  $\nu_{QE} = 1/3$  (at  $2l = 3N - 7$ ),  $\nu_{QE} = 2/3$  (at  $2l = \frac{3}{2}N + 2$ ), and  $\nu_{QE} = 1/2$  (at  $2l = 2N - 3$  and  $2N + 1$ ) states shown as straight lines. The values of  $N$  and  $2l$  at which  $L = 0$  ground states separated from excited states by a substantial gap are shown as solid dots and solid squares (for  $\nu_{QE} = 1/3$  and  $2/3$ , respectively) and by open circles and open squares (for  $\nu_{QE} = 1/2$ ). The locations where  $L = 0$  ground states of  $N$  QP's each with angular momentum  $l$  would be expected in the simple pairing model but are not found numerically are indicated by the symbol '+'.  

Series	Symbol	Equation	2l	N
$\nu_{QE} = 1/3$	Solid Square	$2l = 3N - 7$	10, 13, 16, 19, 22, 25, 28	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
	Solid Circle	$2l = \frac{3}{2}N + 2$	10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
	Open Square	$2l = 2N - 3$	10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28	6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5, 11.5, 12.5, 13.5, 14.5, 15.5
	Open Circle	$2l = 2N + 1$	10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28	4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5, 11.5, 12.5, 13.5

$G(\mathcal{R} = 3) \approx G(\mathcal{R} = 1)$ 이며, 이때는 Moore-Read 상태가 적절한 모형일 것으로 기대되며  $\nu = 5/2$  상태에 직접 적용 가능할 것이다 [67]. Moore-Read 상관작용은 3-입자 각운동량  $L'$ 과 이들의 상대 각운동량  $\mathcal{R}_3 = 3l - L'$ 을 써서 나타난 3체 모델 슈도퍼텐셜  $V_3(\mathcal{R}_3) = \delta_{\mathcal{R}_3,3}$  [68]을 써서 기술할 수 있다. Fig. 18은 상대 각운동량이 최소 값 ( $\mathcal{R}_3 = 3$ )인 3중결합의  $L = 0$  바닥상태에 대한 진폭 함수  $\mathcal{G}_3(\mathcal{R}_3 = 3)$ 를 입자의 갯수  $N$ 과 2체 슈도퍼텐셜  $U_\alpha(\mathcal{R})$ 에 나타나는 인수  $\alpha$ 의 함수로 나타낸 것이다. 인수  $\alpha$ 가  $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$ 일 때  $\mathcal{G}_3(\mathcal{R}_3 = 3)$ 이 최소값을 가지므로  $\mathcal{R}_3 = 3$ 인 3중결합 상태를 최대한으로 기피하게 됨을 알 수 있다. 그러나,  $\alpha \approx 1$ 근처에서는  $\mathcal{G}_3(\mathcal{R}_3 = 3)$ 은 증가하여  $\alpha = 0$ 일 때의 값을 능가한다. 이러한 수치 실험 결과는 2-입자 쌍보다 큰 다발 형성에 대한 가능성을 뒷받침한다.

최근에 Pan 등 [53]이 관측한 결과는, “전자 채움인수가 4/11과 4/13인 상태는 스핀편극된 CF 체계의 비압축 상태가 될 수 없다”는 제안을 부정하기 보다는, “Laughlin 상관작용을 드러내지 않는 특정한 값의  $\nu_{QP}$ 에서는 QP들이 쌍을 이룬다”는 모형을 실험적으로 뒷받침하는 측면이 있다. 아울러, QP쌍 형성 모형에서는, 그간 제안된 다양한 시도에서 성공적이지 못했던, 3/8이나 3/10과 같은 바닥 LL의 짝수 분모 분수채움 상태도 예상할 수

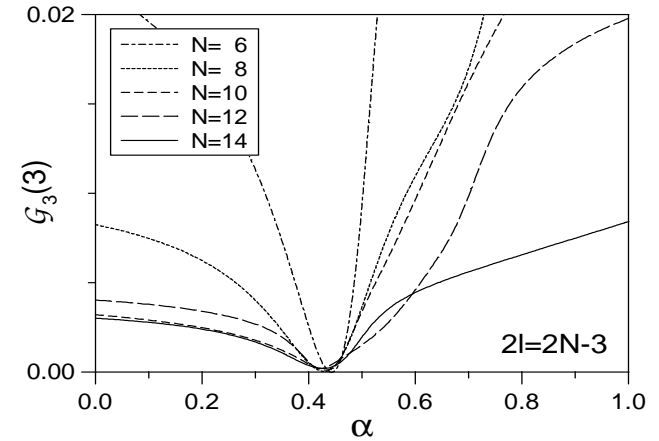


Fig. 18. Triplet amplitude  $\mathcal{G}_3(\mathcal{R}_3 = 3)$  plotted as a function of  $\alpha$  in the lowest  $L = 0$  state of different numbers of Fermions  $N$  interacting through  $U_\alpha$  in a shell with  $2l = 2N - 3$ .

있다.  $V_{QP-QP}(\mathcal{R})$  [21, 32, 39, 40, 50, 52, 53, 69, 70]의 특성을 점검하지 않고 Laughlin 상관 개념을 (QP를 내포하고 있는) 딸 상태에 무작정 반복 적용하는 방법은 항상 성공적일 수는 없다 [71, 72]. 이곳에서 자세히 알아본 ‘CF QP들의 쌍 형성’ 메카니즘과 ‘QP 쌍들 사이의 Laughlin 상관작용’은 분수 양자 홀 상태를 드러내는 전자액체에 있어서 ‘새로운 종류’의 QP 개념과 비압축성 상태에 대한 전혀 새로운 계통 구조를 제시하고 있다.

### 감사의 글

본 총설 논문은 미국 에너지성, 한국학술진흥재단, 한국과학재단, 부산대학교 연구재단의 지원으로 지난 10여년간 수행한 저차원 양자 홀 계에 대한 주요 연구결과를 바탕으로 양자 홀 상태의 준입자들 간 잔여 상호작용의 역할을 재조명한 것이다. 이 총설 논문을 준비하는 동안 부산대학교 자유과제 학술연구비 (2007-2009년)의 지원에 감사드린다.

### 참고 문헌

[1] See, for example, the Proceedings of the International Conferences on Electronic Properties of Two Dimensional Systems (1975-2007) published in *Surface Science*, *Physica B*, and *Physica E*.  
 [2] T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).



- [3] J. J. Quinn, A. Wojs, and K.-S. Yi, *Composite Fermions in Quantum Hall systems*, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi” Courses 2003, “The Electron Liquid Paradigm in Condensed Matter Physics” Villa Monastero, Varenna, Como Lake, Italy, (July 29 - August 8, 2003). The work reported in the current review paper draws heavily on the lectures presented in this school.
- [4] J. J. Quinn, *Condens. Matt. Theor.* **11**, 275 (1996).
- [5] J. J. Quinn, A. Wojs, and K. S. Yi, *J. Korean Phys. Soc.* **45**, S491 (2004).
- [6] *The Quantum Hall Effect* edited by R. E. Prange and S. M. Girvin, 2nd edition (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [7] K. S. Yi, *Physics of Low Dimensional Electrons* (ADTEC, Seoul, 2000).
- [8] See, for example, L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1977) p. 458; S. Gasiorowicz *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1996) chap. 13.
- [9] T. Chakraborty and P. Pietiläinen, *The Quantum Hall Effects* Fractional and Integral, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1995) p.249.
- [10] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [11] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632 (1981).
- [12] G. F. Giuliani, J. J. Quinn, and S. C. Ying, *Phys. Rev. B* **28**, 2969 (1983).
- [13] See, for example, S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra* (Prentice-Hall, Englewood Cliff, 1979) p.202.
- [14] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [15] D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
- [16] A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics* Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [17] B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583 (1984).
- [18] D. Arovas, J. R. Schrieffer and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 722 (1984).
- [19] D. P. Arovas in *Geometric Phases in Physics* ed. by A. Shapere and F. Wilczek (World Scientific, Singapore 1989) p.284.
- [20] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, (World Scientific, Singapore, 1990).
- [21] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 956 (1988).
- [22] G. Fano, F. Ortolani, and E. Colombo, *Phys. Rev. B* **34**, 2607 (1986).
- [23] G. Baym, *Quantum Mechanics*, (Benjamin, Inc. Advanced Book Program, Reading, 1977) p.374.
- [24] J. J. Quinn and A. Wojs, *J. Phys.:Condens. Matter* **12**, R265 (2000).
- [25] A. Wojs and J. J. Quinn, *Physica E* **3**, 181 (1998).
- [26] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev. B* **47**, 7312 (1993).
- [27] J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
- [28] X. M. Chen and J. J. Quinn, *Solid State Commun.* **92**, 865 (1994).
- [29] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects : Field Theoretical Approach and Related Topics* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [30] O. Heinonen, *Composite Fermions: a Unified View of the Quantum Hall Regime* (Singapore, World Scientific, 1998).
- [31] A. Lopez and E. Fradkin, *Phys. Rev. B* **44**, 5246 (1991).
- [32] A. Wojs and J. J. Quinn, *Phil. Mag. B* **80**, 1405 (2000).
- [33] S.-Y. Lee, V. W. Scarola and J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 256803 (2001).
- [34] J. J. Quinn and A. Wojs, *Physica E* **6**, 1 (2000).
- [35] A. Wojs and J. J. Quinn, *Solid State Commun.* **110**, 45 (1999).
- [36] A. Wojs and J. J. Quinn, *Phys. Rev. B* **61**, 2846 (2000).
- [37] A. Wojs, *Phys. Rev. B* **63**, 125312 (2001).
- [38] A. Wojs and J. J. Quinn, *Physica E* **12**, 63 (2002).
- [39] P. Sitko, S. N. Yi, K.-S. Yi and J. J. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3396 (1996).
- [40] Similar approach was recently used by S.-Y. Lee, V. W. Scarola and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **66**, 085336 (2002).
- [41] J. J. Quinn, A. Wojs, Jennifer J. Quinn and A. T. Benjamin, *Physica E* **11**, 182 (2001).
- [42] A. T. Benjamin, Jennifer J. Quinn, J. J. Quinn and A. Wojs, *J. of Combinatorial Theory A* **95**, 390 (2001).

- [43] See, for example, A. de Shalit and I. Talmi, *Nuclear Shell Theory* (Academic Press, New York, 1963) p.268.
- [44] See, for example, M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1961) p.204.
- [45] G. Moore and N. Read, Nucl. Phys. B **360**, 362 (1991).
- [46] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [47] *Geometric Phases in Physics* ed. by A. Shapere and F. Wilczek (World Scientific, Singapore 1989).
- [48] See, for example, D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New Jersey, 1995) p.343.
- [49] John J. Quinn and Jennifer J. Quinn, Phys. Rev. B **68**, 153310 (2003).
- [50] F. D. M Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983).
- [51] J. K. Jain, Phys. Rev. B **40**, 8079 (1989); **41**, 7653 (1990).
- [52] P. Sitko, K.-S. Yi, and J. J. Quinn, Phys. Rev. B **56**, 12417 (1997). The CF hierarchy reproduces Haldane’s original hierarchy [50] if the mean field picture is assumed to be valid. A CF hierarchy scheme was first introduced by J.K. Jain and V. J. Goldman [Phys. Rev. B **45**, 1225 (1992)]. Their approach is different and somewhat more formal than that of Sitko *et al.*
- [53] W. Pan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **90**, 016801 (2003). Clear minima in  $\sigma_{xx}$  at  $\nu = 7/11$  and  $9/13$  (the  $e-h$  conjugates of  $\nu = 4/11$  and  $4/13$ ) were observed earlier by V. J. Goldman and M. Shayegen, Surface Science **229**, 10 (1990). In addition, R. G. Mani and K. von Klitzing suggested the occurrence of quantum Hall states at  $\nu = 4/11$  and  $4/13$  based on a self-similarity in the Hall resistance as a function of filling factor  $\nu$ . However, Pan *et al.* observed condensed states at even denominator fractions (like  $\nu = 3/8$  and  $3/10$ ) with  $\nu < 1$ .
- [54] K. Park and J. K. Jain, Phys. Rev. B **62**, R13274 (2000).
- [55] K. S. Yi and J. J. Quinn, J. Korean Phys. Soc. **30**, S204 (1997).
- [56] K. S. Yi, P. Sitko, A. Khurana and J. J. Quinn, Phys. Rev. B **54**, 16432 (1996).
- [57] S. N. Yi, X. M. Chen and J. J. Quinn, Phys. Rev. B **53**, 9599 (1996).
- [58] S. N. Yi, K. S. Yi, Y. M. Kim, J. H. Lee and S. D. Choi, J. Korean Phys. Soc. **39**, 53 (1999).
- [59] I. Szlufarska, A. Wojs and J. J. Quinn, Phys. Rev. B **64**, 165318 (2001).
- [60] J. J. Quinn, A. Wojs and K.-S. Yi, Solid. St. Commun. **30**, 165 (2004).
- [61] J. J. Quinn, A. Wojs and K.-S. Yi, Phys. Lett. A **318**, 152 (2003).
- [62] A. Wojs, K.-S. Yi and J. J. Quinn, Acta Phys. Pol. A **103**, 517 (2003).
- [63] Jennifer J. Quinn and J. J. Quinn, Solid St. Commun. **140**, 52 (2006).
- [64] This pair amplitude should not be confused with that introduced in the description of superconductors. These pairs are pairs of Laughlin quasiparticles, which can be treated as CF’s in a partially filled CF shell. They are similar to the electron pairs suggested by B.I. Halperin [Helv. Phys. Acta **56**, 75 (1983)] in an attempt to describe filling factor like  $\nu = 2/5$ .
- [65] A. Wojs, J. J. Quinn and K.-S. Yi, Phys. Rev. B **69**, 205322 (2004).
- [66] A. Wojs and J. J. Quinn, Phys. Rev. B **71**, 045324 (2005).
- [67] G. Moore and N. Read, Nucl. Phys. B **360**, 362 (1991).
- [68] X.-G. Wen, Phys. Rev. Lett. **70**, 355 (1993); N. Read and E. H. Rezayi, Phys. Rev. B **54**, 16864 (1996).
- [69] See, however, results of large-scale numerical computations by S. S. Mandal and J. K. Jain, Phys. Rev. B **66**, 155302 (2002).
- [70] A. Wojs and J. J. Quinn, Physica E **6**, 60 (2000).
- [71] J. H. Smet, Nature **422**, 391 (2003).
- [72] R. G. Mani and K. von Klitzing, Z. Phys. B **100**, 635 (1996).

## Composite Fermions in Fractional Quantum Hall States and Quasiparticle Interactions

Kyung-Soo Yi\*

*Department of Physics, Pusan National University, Busan 609-735*

Arkadiusz Wójs

*Institute of Physics, Wrocław University of Technology, 50-370 Wrocław, Poland*

John J. Quinn

*Department of Physics and Astronomy, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee 37996, USA*

(Received 30 August 2007)

The occurrence of incompressible quantum fluid states in a two-dimensional system is reviewed as a result of electron-electron interactions in a highly degenerate fractionally filled Landau level. Novel quasiparticles (QPs), called composite Fermions (CFs), have allowed a simple single-particle description of the most prominent incompressible states. The properties of the pseudopotentials describing the QP interactions are examined. Residual interactions among these QPs determine the type of daughter states that can occur at the next generation of the CF transformation. We show that the subharmonic pseudopotential describing the quasielectron (QE) interactions of a spin-polarized system is different from the Coulomb potential and prevents the second generation of CFs in partially filled QE shells. The subharmonic potential does not produce Laughlin correlations, but favors the formation of pairs or larger clusters of QPs. Laughlin correlations are explicitly shown not to occur for the lowest energy states in the spectrum when the pseudopotential is not superharmonic. This new type of pairing correlation leads to a nondegenerate incompressible ground state.

PACS numbers: 71.10.Pm, 73.43.-f

Keywords: Two-dimensional system, Fractional quantum Hall effect, Composite Fermion model, Quasiparticle interaction, Residual interactions, Quasiparticle pairing, Condensed quantum fluid states

\*E-mail: ksyi@pusan.ac.kr